

Αναλυτική Γεωμετρία

22/02/2018

Ευκλείδεια Γεωμετρία

Επιπεδομετρία
(Γεωμετρία του επιπέδου)

Στερεομετρία
(Γεωμετρία του χώρου)

Αξιοματική Θεμελίωση (κατά David Hilbert)

• Αξιώματα σχετικών θέσεων

Αρχικές έννοιες

Δεχόμαστε την ύπαρξη ενός μη κενού συνόλου E (χώρος)
Τα στοιχεία του συνόλου καλούνται σημεία. (Συμβολ. με $A, B, \Gamma, \dots$)

Δεχόμαστε την ύπαρξη 2 κλάσεων σημείων του E

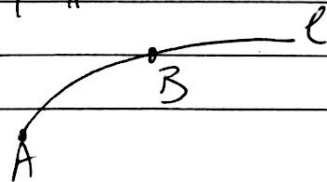
• κλάση των ευθειών (σημεία): $\varepsilon, \delta, \eta, \dots$

• κλάση των επιπέδων ($\pi, \sigma, \tau, \dots$)

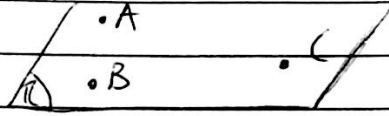
- Αξιώματα διατάξης
- Αξιώματα γεωμετρικής ισομέτρειας (ισότητας)
- Αξιώματα συνέχειας
- Αξιώματα παράλληλων

→ Αξιώματα σχετικών θέσεων

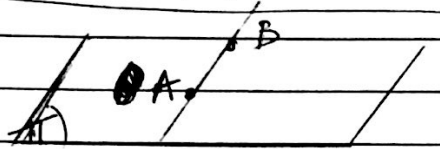
(Σ1): Για τυχόντα σημεία A, B υπάρχει μοναδική ευθεία ℓ
που τα περιέχει ($\ell = AB$ ή $\ell = BA$)



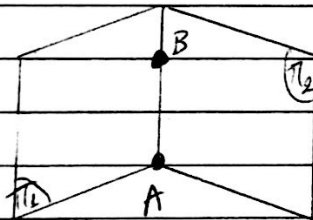
(22) Για τρία τμήματα ή συνευθειακά ευθεία υπάρχει μοναδικό επίπεδο που τα περιέχει.



(23) Αν δύο ευθείες A, B ανήκουν σε επίπεδο π τότε και η ευθεία AB περιέχεται στο π .



(24) Αν επίπεδα π_1, π_2 έχουν ένα κοινό ευθύ A τότε υπάρχει και δεύτερο B κοινό.



(25) Κάθε ευθεία περιέχει δύο τουλάχιστον ευθείες. Κάθε επίπεδο περιέχει 3 τουλάχιστον ή συνευθειακά ευθείες. Υπάρχουν 4 τουλάχιστον ή συνευθειακά ευθείες.

ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΠΡΟΒΕΙΣ

ΠΡΟΦΗΝΑ Δύο διαφ. ευθείες ενός επιπέδου είτε α) έχουν ένα ακριβώς κοινό ευθύ ή κανένα.
Δύο επίπεδα είτε β) τέμνονται σε ομόρροπη ευθεία ή γ) δεν α) έχουν κανένα κοινό ευθύ.

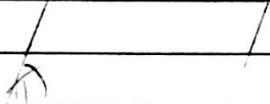
} ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΙΠΕΔΑ *

Σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου

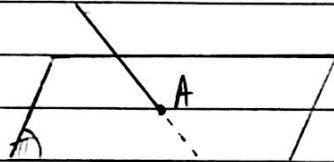
Δίνονται ευθεία ℓ και επίπεδο π

(i) $\ell \cap \pi = \emptyset$

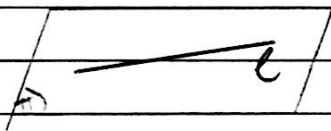
ℓ $\parallel$ π ή $\ell \perp \pi$ (καθίσταται παράλληλη προς το π)



(ii) $\ell \cap \pi = \{A\}$



(iii) $\ell \cap \pi = \ell$

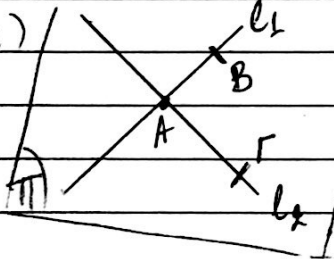


$\ell \subset \pi$

Σχετικές θέσεις δύο ευθειών

Δίνονται οι ευθείες ℓ_1 και ℓ_2

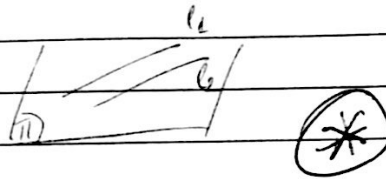
(i)



$\ell_1 \cap \ell_2 = \{A\}$

Οι ευθείες είναι συγγραμμικές

(ii) $l_1 \cap l_2 = \emptyset$
 l_1, l_2 συνεπίπτες

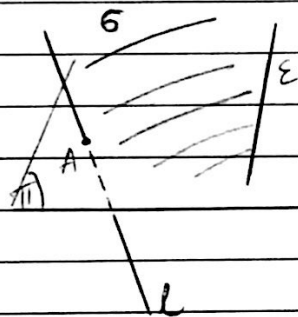


Προτάση Δύο ευθείες με κοινό σημείο παράλληλες αν και μόνο αν είναι συνεπίπτες και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

(iii) $l_1 \cap l_2 = \emptyset$
 l_1, l_2 ΟΧΙ συνεπίπτες

Ασυνεπίπτες ευθείες

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω ευθεία l και επίπεδο π , τέτοια ώστε $l \cap \pi = \{A\}$

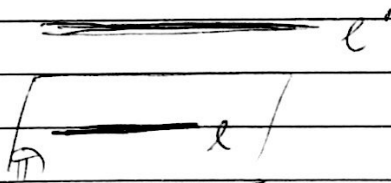


Κάθε ευθεία ϵ του επιπέδου π και δ ν διέρχεται από το A είναι συνεπίπτη με την l

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω ότι αν l και ϵ δεν είναι συνεπίπτες, τότε ~~δεν~~ συνεπίπτες

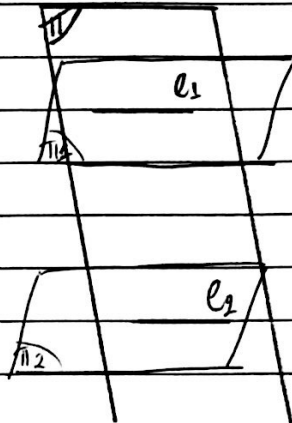
Έστω g το επίπεδο τους. $A \in g, A \in \pi$
 $\Rightarrow \exists$ και άλλοτερο κοινό σημείο B
 $\Rightarrow \pi \cap g = AB$ ή $\pi \equiv g$

ΠΡΟΤΑΣΗ



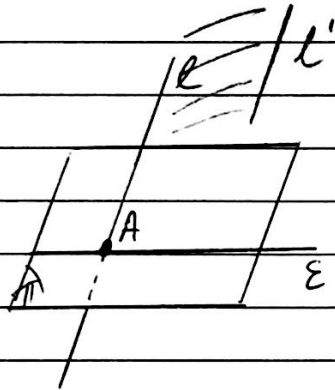
$\left. \begin{array}{l} l' \parallel l \\ l \subset \pi \\ l' \not\subset \pi \end{array} \right\} \Rightarrow l' \parallel \pi$

ΠΡΟΤΑΣΗ



$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \parallel \pi_2 \\ \pi \cap \pi_1 = l_1 \\ \pi \cap \pi_2 = l_2 \end{array} \right\} \Rightarrow l_1 \parallel l_2$$

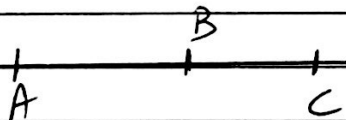
ΠΡΟΤΑΣΗ



$$\left. \begin{array}{l} l \cap \pi = \{A\} \\ l \parallel l' \end{array} \right\} \Rightarrow l' \cap \pi = \{A'\}$$

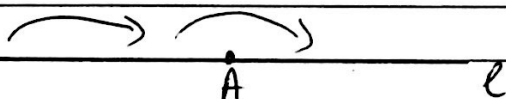
Αξιώματα διατάξης

(Δ1) Αν το σημείο B είναι μεταξύ των A, C, τότε A, B, C είναι διαφ. μεταξύ τους, συνεπώς και το B είναι μεταξύ των A και C



Τα αξιώματα της διατάξης μας επιτρέπουν να ορίσουμε:

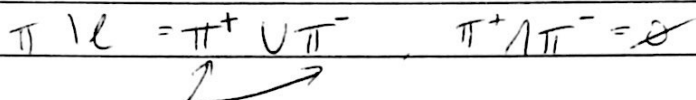
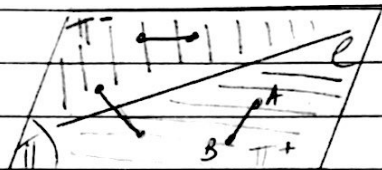
• Ημιευθείες



$$l \setminus \{A\} = l_1 \cup l_2$$

• Ηλεκτρονικά

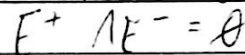
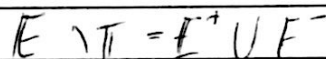
Διμετακινούμενα π και e στην π



~~π + e~~ ως π με αργή την e
ηλεκτρονικά

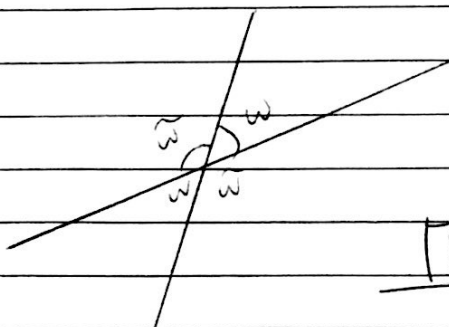
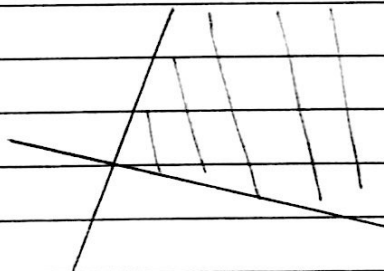
• Ηλεκτρονικά

Διμετακινούμενα π



E^+ , E^- αβήτες
προς e στο π

• Γωνίες



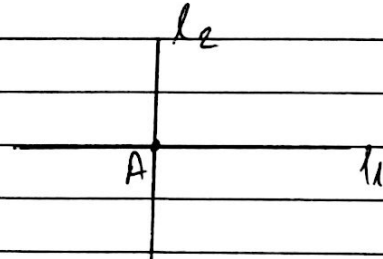
Η γωνία ω καθεμία ορθή
αν είναι γων. ίσους με την
απεναντίας της $\tilde{\omega}$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Ότες οι ορθές γωνίες
είναι γων. ίσους

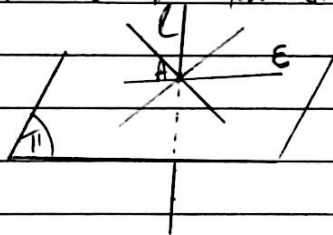
Καθέση ευθείας

Η ευθεία l_1 είναι κάθετη προς την ευθεία l_2 αν
 $l_1 \cap l_2 = \{A\}$ και η ποτασία τους είναι ορθή ($l_1 \perp l_2$)



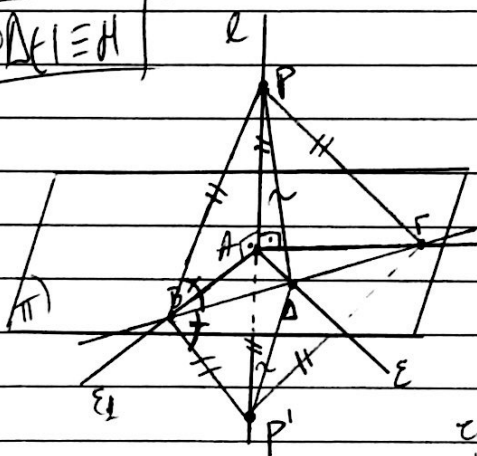
Καθόλουτα ευθείας και επιπέδου

Ορισμός Μια ευθεία l λέγεται κάθετη στο επίπεδο π ($l \perp \pi$) αν $l \cap \pi = \{A\}$ και $l \perp \epsilon$ όπου ϵ είναι οποιαδήποτε ευθεία του π που διέρχεται από το σημείο A .



ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω ότι η ευθεία l είναι κάθετη σε δύο ^{τεμνομένες} ευθείες του επιπέδου π . Τότε $l \perp \pi$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



$$l \cap \pi = \{A\}$$

$$l \perp \epsilon_1, l \perp \epsilon_2$$

ϵ_1, ϵ_2 περιέχονται στο π

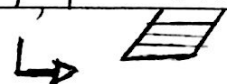
$$\epsilon_1 \cap \epsilon_2 = \{A\}$$

ϵ_2

??
 $\Rightarrow l \perp \epsilon$
 όπου ϵ οποιαδήποτε ευθεία του π που διέρχεται από το σημείο A

Θεωρούμε ότι την l την εκατέπαιρνε του επιπέδου π ευθεία P, P' είναι αντί

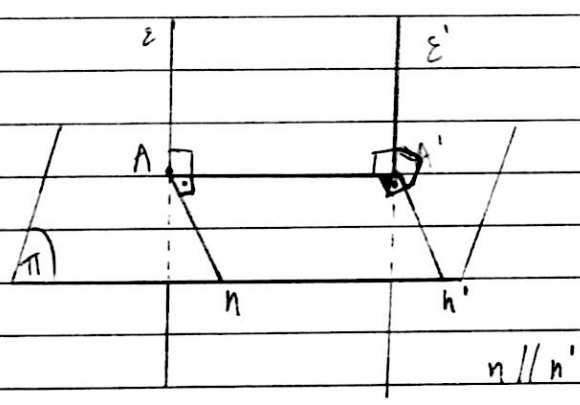
$$AP = AP'$$



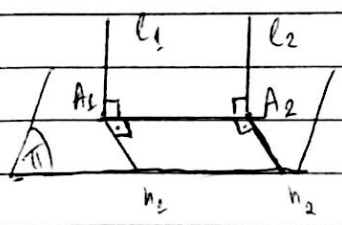
T_2 BA είναι $\Delta \alpha \beta \gamma \delta \epsilon$ και $\gamma \delta \epsilon$ $\Delta \alpha \beta \gamma \delta \epsilon$ PBP' $A \alpha \beta \gamma \delta \epsilon$ PBP'
 είναι $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon$, $\Delta \alpha \beta \gamma \delta \epsilon$ $BP = BP'$
 Όπως $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon$ $BP = BP'$
 Τα $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon$ PBP' και PBP' είναι $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon$ $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon$
 $\Rightarrow PBP' = PBP'$
 $\Rightarrow T_2$ PBP' και PBP' είναι $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon$ $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon$
 $\Rightarrow PD = PD' \Rightarrow PBP'$ $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon$
 $\xrightarrow{\text{AD}} AD$ $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon \Rightarrow l \perp \epsilon$

ΠΡΟΤΑΣΗ

$\epsilon \perp \pi$, $\epsilon' \parallel \epsilon \Rightarrow \epsilon' \perp \pi$



ΠΡΟΤΑΣΗ

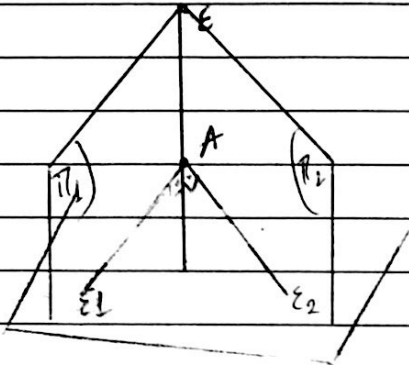


$l_1 \perp \pi$
 $l_2 \perp \pi \Rightarrow l_1 \parallel l_2$

ПОТАШ

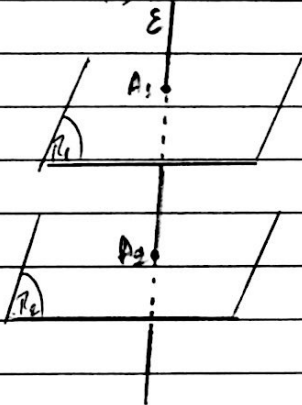
Diretta tutta e un gruppo A auto

Tote uniplex parvulus enifus Le
Go Gupio A.

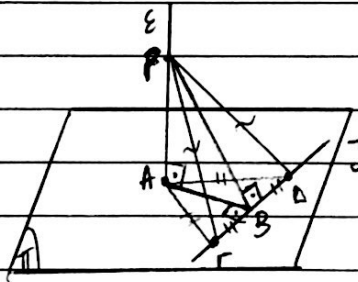


ПРОТЯЖИ

'EGL' $\pi_1 \parallel \pi_2$ $\mu_{\pi_1} \quad \varepsilon \perp \pi_1 \Rightarrow \varepsilon \perp \pi_2$



GEOPHMA TRION KADETON



(i) $H \in \Pi$ is a G -invariant A

$$A \vee AB \vdash C \vdash PB \vdash S$$

(ii) $\varepsilon \perp \pi$ $\wedge$ $PA \perp J \Rightarrow AB \perp J$

(iii) $PB \perp l$, $AB \perp l$, $l \perp AB$

$$\Rightarrow \varepsilon \cdot \frac{1}{\pi}$$

Άσκηση

(i) Δεσφύ εφύα Γ , Δ κς J εφάφωθεν τω B τ.ω

$$B\Gamma = B\Delta$$

Το $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$ εφν (εφφωδς) εφν AB ύφς κς εφφωδς

$$\text{Εφφωδς } A\Gamma = A\Delta$$

Τα τρφωα $\hat{P}\hat{A}\hat{\Gamma}$ κς $\hat{P}\hat{A}\hat{\Delta}$ εφν :

$$AP = AP, A\Gamma = A\Delta, \hat{P}\hat{A}\hat{\Gamma} = \text{οφφωδς} = \hat{P}\hat{A}\hat{\Delta}$$

$$\text{Αφ } \hat{P}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{P}\hat{A}\hat{\Delta} \Rightarrow P\Gamma = P\Delta$$

Εφφωδς PB εφφωδς ~~οφφωδς~~ εφφωδς $\hat{P}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$

$$\Rightarrow PB \text{ εφν ύφς} \Rightarrow PB \perp J$$

Το πρσφφωδς μφφωδς εφ φφφωδς

01/03/2018

Μαθημα (Καφφωδς) φκ τnv Σφφφωδς

$$\mathbb{R}^3 \text{ εφν } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Εφφωδς

$$l_{p,u} = \{ p = p_0 + tu \mid t \in \mathbb{R} \} \quad | u \neq 0 |$$

Εφφωδς

$$\Pi_{p,u,w} = \{ p = p_0 + tu + sw \mid t, s \in \mathbb{R} \} \quad | u, w \text{ εφν φφ. αφφωδς} |$$

Εφφωδς αφφωδς μφφωδς

Ζφφωδς εφφωδς μφφωδς τν $\mathbb{R}^3$

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, w) \mapsto \langle u, w \rangle := u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3$$

$$u = (u_1, u_2, u_3)$$

$$w = (w_1, w_2, w_3)$$

$$\langle u+u', w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle u', w \rangle$$

$$\langle \lambda u, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle \quad \leftarrow$$

για κάθε $u, w \in V$ από
το 1. $\delta \lambda u, w$

$$\langle u, w \rangle = \langle w, u \rangle$$

για αλγεβρικές και το 2. $\delta \lambda u, w$
συμμετρικές γραμμές

$$\langle u, u \rangle \geq 0$$

$$\text{γιατί } \langle u, u \rangle = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \geq 0$$

$$\text{και } \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Τα u, w να λένονται ορθογώνια (και λέει η
ορθογώνια) $\Leftrightarrow \langle u, w \rangle = 0$
($\langle 0, u \rangle = 0$ παρατηρούμε)

ΜΗΚΟΣ

SOS ↑

Μήκος του $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ είναι $\|u\|$
ορίζεται ο αριθμός

$$\rightarrow \|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}, \quad u = (u_1, u_2, u_3)$$

Το u να λέεται μοναδιαίο $\Leftrightarrow \|u\| = 1$

Συνήθως βάση του $\mathbb{R}^3$

$$\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$$

$$u = (u_1, u_2, u_3) = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$$

$$\{ \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ 1 & , i = j \end{cases} \}$$

LP

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια βάση $\{w_1, w_2, w_3\}$ του $\mathbb{R}^3$ कहिता

ορθοκανονική (orthonormal) $\Leftrightarrow \langle w_i, w_j \rangle = \delta_{ij}$

ΛΗΜΜΑ

Έστω $\{w_1, w_2, w_3\}$ ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

Για κάθε $v \in \mathbb{R}^3$ ισχύει:

$$v = \langle v, w_1 \rangle w_1 + \langle v, w_2 \rangle w_2 + \langle v, w_3 \rangle w_3$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$v = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3$$

$$\langle v, w_1 \rangle = \langle \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3, w_1 \rangle$$

$$= \lambda_1 \langle w_1, w_1 \rangle + \lambda_2 \langle w_2, w_1 \rangle + \lambda_3 \langle w_3, w_1 \rangle$$

$$= \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 0$$

$$= \lambda_1$$

Ανισότητα

Cauchy - Schwarz



Για κάθε $v, w \in \mathbb{R}^3$ ισχύει $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$

Ενδεόν η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν v, w είναι γκατ.

(εξαρ. Conditi to ένα ένα το $\lambda \lambda \lambda \lambda \lambda \lambda$ του $\lambda \lambda \lambda \lambda$)

Απόδειξη

Αν $v=0$, τότε η ανισότητα είναι προφανής

Έστω $v \neq 0$, $\langle \lambda v + w, \lambda v + w \rangle \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 \langle v, v \rangle + 2\lambda \langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \|v\|^2 \lambda^2 + 2\langle v, w \rangle \lambda + \|w\|^2 \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow (2\langle v, w \rangle)^2 - 4\|v\|^2 \|w\|^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4\langle v, w \rangle^2 \leq 4\|v\|^2 \|w\|^2 \Leftrightarrow \langle v, w \rangle^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\langle v, w \rangle^2} \leq \|v\| \|w\| \Leftrightarrow |\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$$

LD

Αν ισχύει $|\langle u, w \rangle| = \|u\| \|w\|$, τότε $\Delta = 0$ άρα το
 τριώνυφο έχει για συνδι πλά Δ συνδι
 $\langle u, u+w \rangle = 0 \Leftrightarrow \Delta + w = 0 \Leftrightarrow w = -\Delta u$

$$\left(\begin{array}{l} u = (u_1, u_2, u_3) \quad , \quad w = (w_1, w_2, w_3) \\ |u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3| \leq \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2} \end{array} \right)$$

Πωρια

$u, w \in \mathbb{R}^3$, $u \neq 0$ και $w \neq 0$

$$|\langle u, w \rangle| \leq \|u\| \|w\| \Leftrightarrow$$

$$\frac{|\langle u, w \rangle|}{\|u\| \|w\|} \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{\langle u, w \rangle}{\|u\| \|w\|} \right| \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \left| -1 \leq \frac{\langle u, w \rangle}{\|u\| \|w\|} \leq 1 \right| \Rightarrow \text{υπάρχει μοναδικός αριθμός } \varphi \in [0, \pi] : \cos \varphi = \frac{\langle u, w \rangle}{\|u\| \|w\|}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ο μοναδικός αριθμός $\varphi \in [0, \pi]$ τέτοιος ώστε

$$\cos \varphi = \frac{\langle u, w \rangle}{\|u\| \|w\|} \text{ ονομάζεται } \underline{\text{γωνία}} \text{ των } u \neq 0 \text{ και } w \neq 0$$

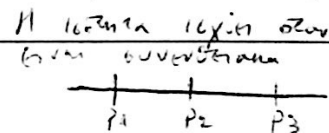
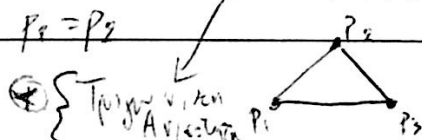
Παρατήρηση: $u \perp w \Leftrightarrow \langle u, w \rangle = 0 \Leftrightarrow \cos \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = \pi/2$
 $u \neq 0, w \neq 0$ $\varphi \in [0, \pi]$

Ευκλείδεια απόσταση

Καθορίζουμε Ευκλείδεια απόσταση των σημείων $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$,
 $P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ τον αριθμό $d(P_1, P_2) = \|P_2 - P_1\| =$
 $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Η απόσταση d αντιστοιχεί να πληροί τα ακόλουθα:

- $d(P_1, P_2) \geq 0$
- $d(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$
- $d(P_1, P_3) \leq d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$



???

ΠΡΟΤΑΣΗ Τριγωνική ανισότητα ή ανισότητα Μinkowski

Για κάθε $u, w \in \mathbb{R}^3$ ισχύει $\|u+w\| \leq \|u\| + \|w\|$

Η ανισότητα ισχύει και για $\mathbb{R}^n$ και για $\mathbb{C}^n$ (αρκεί να αλλάξει η έννοια του $\langle \cdot, \cdot \rangle$)

ΛΗΜΜΑ

$$\|u+w\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, w \rangle + \|w\|^2 \quad \forall u, w \in \mathbb{R}^3$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (Μηχανικός)

$$\begin{aligned} \|u+w\|^2 &= \langle u+w, u+w \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, w \rangle + \langle w, u \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\langle u, w \rangle + \|w\|^2 \end{aligned}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (Πρόσβαση)

$$\begin{aligned} \|u+w\|^2 &= \|u\|^2 + 2\langle u, w \rangle + \|w\|^2 \leq \|u\|^2 + 2|\langle u, w \rangle| + \|w\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|w\| + \|w\|^2 \\ &= (\|u\| + \|w\|)^2 \end{aligned}$$

ΙΣΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Κάποια ισομερία φ από $\mathbb{R}^3$ (ή από $\mathbb{R}^2$) προς $\mathbb{R}^3$ (ή προς $\mathbb{R}^2$) ονομάζεται ισομετρία αν ικανοποιεί:

$$d(\varphi(p), \varphi(q)) = d(p, q) \quad \forall p, q \in \mathbb{R}^3 \text{ (ή } \mathbb{R}^2)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Το σύνολο $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ (ή $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$) λέγεται γεωμετρικός τόπος αν υπάρχει $\tilde{\Sigma} \subset \mathbb{R}^3$ (ή $\mathbb{R}^2$) τέτοιο ώστε $\varphi(\Sigma) = \tilde{\Sigma}$

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ

Το σύνολο των ισομεριών από $\mathbb{R}^3$ (ή από $\mathbb{R}^2$) προς $\mathbb{R}^3$ (ή προς $\mathbb{R}^2$) συμβολίζεται με $\text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ ($\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$)

Παρατηρήσεις: • $Id \in Isom(\mathbb{R}^3)$ $Id(p) = p$
 • $f, g \in Isom(\mathbb{R}^3) \Rightarrow g \circ f \in Isom(\mathbb{R}^3)$

Αντίστροφο

$$d((g \circ f)(p), (g \circ f)(q)) = d(g(f(p)), g(f(q))) \stackrel{g \in Isom(\mathbb{R}^3)}{=} d(f(p), f(q)) \stackrel{f \in Isom(\mathbb{R}^3)}{=} d(p, q)$$

Μια κλάση ισομετρίων στο $\mathbb{R}^3$

Παρατηρούμε μετastopά στα $v \in \mathbb{R}^3$ είναι η αλληλουχία

$$T_v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T_v(p) = p + v$$

- $T_0 = Id$

- $T_v \circ T_w = T_{v+w} = T_w \circ T_v$ (διωθόμενα)

$$T_v \circ T_w(p) = T_v(T_w(p)) = T_v(p+w) = (p+w) + v = p + (w+v) = T_{w+v}(p) \quad \forall p$$

Αντίστροφο $\Rightarrow T_v \circ T_w = T_{v+w}$

- Για $w = -v$

$$T_v \circ T_w = T_v \circ T_{-v} = Id = T_{-v} \circ T_v$$

- $T_v^{-1} = T_{-v}$

$$f: X \rightarrow Y$$

$$g: Y \rightarrow X$$

$$g \circ f = Id_X$$

$$f \circ g = Id_Y$$

$$\Rightarrow g = f^{-1}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Για $v, T_v \in Isom(\mathbb{R}^3)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\begin{aligned} d(T_v(p), T_v(q)) &= \|T_v(p) - T_v(q)\| \\ &= \|(p+v) - (q+v)\| \\ &= \|p - q\| \\ &= d(p, q) \end{aligned}$$

ΤΕΛΟΣ

Μία δεύτερη τάξη ιδιότητα

ΟΡΙΣΜΟΣ Μία απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (ή $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$)

καλείται ορθογώνιος μετασχηματισμός ή γραμμική ισομετρία αν:

(i) f είναι γραμμ. απεικόνιση

(ii) $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

ή $x, y \in \mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^2$)

Το σύνολο των ορθογώνιων μετασχηματισμών του $\mathbb{R}^3$ (ή του $\mathbb{R}^2$) συμβολίζεται με $O(3)$ (ή $O(2)$)

ΠΡΟΤΑΣΗ

$$O(3) \subset \text{Isom}(\mathbb{R}^3) \quad (O(2) \subset \text{Isom}(\mathbb{R}^2))$$

ΑΠΕΛΕΓΧΗ

$f \in O(3)$, $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι γραμμική απεικόνιση

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3$$

$$d(f(x), f(y)) = \|f(x) - f(y)\| = \|f(x-y)\|$$

$$= \sqrt{\langle f(x-y), f(x-y) \rangle}$$

$$= \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle}$$

$$= \|x-y\|$$

$$= d(x, y)$$

Ο.Ε.Δ.

επίσης ισχύει:

ΠΡΟΤΑΣΗ

Μία γραμμική απεικόνιση

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (ή $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$) είναι ορθογώνιος

μετασχηματισμός αν και μόνο αν είναι ομογενής ως προς

το νόρμα ορθογώνια βάση του $\mathbb{R}^3$ (ή του $\mathbb{R}^2$)

Προϋπόθεση της ιδιότητας:

$$AA^t = A^t A = I \quad (\Leftrightarrow) \quad A^{-t} = A^t$$

Τέτοιες πίνακες ονομάζονται ορθογώνιοι πίνακες

Α Τόπος
ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ
ΣΤΑΘΕΡΟ



LHS for?

Orthogonal 2x2 matrices

Kd ge orthogonales 2x2 matrices sind aus folgenden:

(i) $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} + 1$

(ii) $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} - 1$

$$\det(AA^t) = \det(A^t A) = 1 \Leftrightarrow$$

$$(\det A)(\det A^t) = 1 \Leftrightarrow$$

$$(\det A)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$|\det A| = 1 \Leftrightarrow$$

$$\det A = \pm 1 \text{ in } \det A = \pm 1 \quad \begin{matrix} \uparrow \text{row} \\ \downarrow \text{row} \end{matrix}$$

(i) O, orthogonale Transformationen in $\mathbb{R}^2$ ist Rotation
 $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ und nach in gewöhnlichen Basis

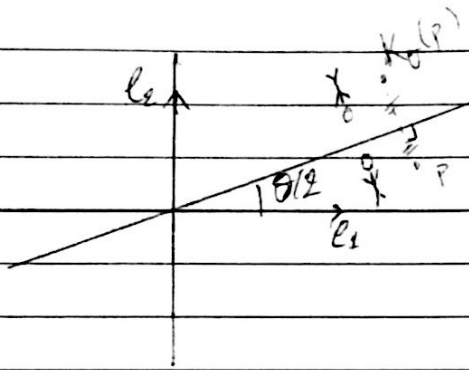
$\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ in $\mathbb{R}^2$ aufbewahrt ist

$P_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und ist eine Orthogonal Transformation



(ii) O, orthogonale Transformationen in $\mathbb{R}^2$ ist Rotation $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$

und nach in gewöhnlichen Basis in $\mathbb{R}^2$ aufbewahrt ist
 $K_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und ist eine Orthogonal Transformation und spiegelt an



Ορθογώνια μετασχηματισμοί στο $\mathbb{R}^3$ $O(3)$

Κάθε ορθογώνιος μετασχηματισμός $f \in O(3)$ έχει $\det f = \pm 1$ και αν $\det f = 1$ τότε f είναι γύρισμα γύρω από κάποιο άξονα.

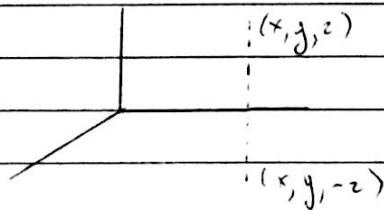
(i)
$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 γύρω από τον άξονα e_3

(ii)
$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 γύρω από τον άξονα e_3

(iii)
$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
 γύρω από τον άξονα e_3

$\theta = 0$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

$(x, y, z) \rightarrow (x, y, -z)$



Αντίστροφή.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗΣ ΙΣΟΜΕΤΡΙΩΝ

Κάθε ισομετρία $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ (ή $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$) γράφεται ως
 σύνθεση :

$$f = T_v \circ g$$

όπου T_v είναι μετατόπιση παράλληλα με v και $g \in O(3)$ (ή $O(2)$)

$$(A \cdot T_v \Delta f) \equiv H$$

Θέτουμε $v = -f(0)$

Ορίζουμε $g = T_{-v} \circ f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned} g(0) &= T_{-v}(f(0)) \\ &= T_{-v}(v) \\ &= v + (-v) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{άρα } |g(0) = 0| \quad (1)$$

$$d(g(x), g(y)) = d(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} \text{Γιὰ } y=0 \text{ έχουμε} \\ \Rightarrow d(g(x), 0) = d(x, 0) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \\ \Rightarrow \|g(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \quad (2) \end{aligned}$$

Τελικά

$$(2) \Leftrightarrow \|g(x) - g(y)\|^2 = \|x - y\|^2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &\|g(x)\|^2 - 2\langle g(x), g(y) \rangle + \|g(y)\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \langle g(x), g(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \quad (*)$$

Άρα τα εικονισμένα βάση του $\mathbb{R}^3$ $\{e_1, e_2, e_3\}$

$$\langle g(e_i), g(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

$$\text{Ενδεχόμενως } \langle g(e_i), g(e_j) \rangle = \delta_{ij}$$

$\Rightarrow g(e_1), g(e_2), g(e_3)$ είναι βάση ορθοκανονική.

$$f(x) = \langle g(x), g(e_1) \rangle g(e_1) + \langle g(x), g(e_2) \rangle g(e_2) + \langle g(x), g(e_3) \rangle g(e_3)$$

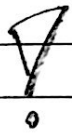
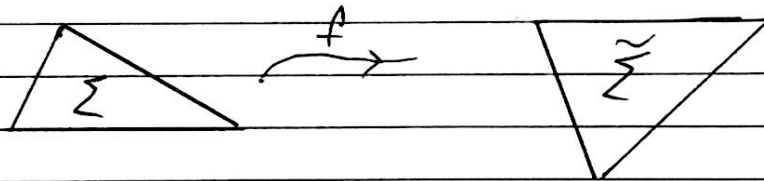
$$\begin{aligned} (*) \Rightarrow g(x) &= \langle x, e_1 \rangle g(e_1) + \langle x, e_2 \rangle g(e_2) + \langle x, e_3 \rangle g(e_3) \\ \Rightarrow \begin{cases} g(x+y) = g(x) + g(y) \\ g(\lambda x) = \lambda g(x) \end{cases} \end{aligned}$$

$$g = T_v \circ f \Rightarrow T_v \circ g = (T_v \circ T_v \circ f)$$

10/03/2018

ΟΡΙΣΜΟΣ

Το σχήμα $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ καλείται γωνομετρική (απλά) επιφάνεια $\tilde{\Sigma} \subset \mathbb{R}^3$ αν υπάρχει ισομετρία $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ ώστε $f(\Sigma) = \tilde{\Sigma}$



Η γωνομετρική επιφάνεια πρέπει να ορίζεται να αποτελείται:

$\leadsto$ Να είναι ακέραια επιφάνεια ώστε σχήμα Σ να είναι γωνομετρική επιφάνεια προς το Σ .

Πρώτα, η ταυτοτική απεικόνιση

$$\text{Id} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\text{Id}(p) = p$$

είναι ισομετρία και $\text{Id}(\Sigma) = \Sigma$

$$\boxed{\text{Id} \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)}$$

$\leadsto$ Να είναι ακέραια επιφάνεια, δηλαδή αν $\tilde{\Sigma}$ είναι γωνομετρική επιφάνεια με το $\tilde{\Sigma}$, τότε αν το $\tilde{\Sigma}$ είναι γωνομετρική επιφάνεια με το Σ . Πρώτα, $\exists f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ ώστε $f(\tilde{\Sigma}) = \Sigma$

10/03/2018

ΘΕΩΡΗΜΑ (i) Κάθε $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ γράφεται ως $f = T_v \circ g$, όπου T_v είναι μεταφ. μεταφορά και v και $g \in O(3)$ (δηλ. ορθογώνιος μετασχηματισμός)

(ii) $f_1, f_2 \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3) \Rightarrow f_1 \circ f_2 \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$

ΠΡΟΤΙΜΑ Κάθε $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ αντιστρέφεται και η αντιστροφή της $f^{-1} \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ $f = T_v \circ g, g \in O(3)$

$$T_v \circ T_w = T_{v+w}, T_0 = Id$$

$$T_v \circ T_{-v} = T_0 = Id = T_{-v} \circ T_v \Rightarrow T_v \text{ αντιστρέφεται με } T_v^{-1} = T_{-v}$$

$$g \in O(3) \Leftrightarrow \begin{cases} g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ γραμ. απεικόνιση και} \\ \langle g(x), g(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3 \quad (1) \end{cases}$$

$$3 = \dim \text{Ker } g + \dim \text{Im } g \quad (*)$$

$$\begin{aligned} |x \in \text{Ker } g| &\Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow \langle 0, g(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall y \\ &\Rightarrow \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{x=0} \end{aligned}$$

$$\text{Αρα } \text{Ker } g = \{0\} \Rightarrow g \text{ 1-1 } \stackrel{(*)}{\Rightarrow} g \text{ εντ}$$

$$\Rightarrow \text{Η } g \text{ αντιστρέφεται με } g^{-1}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ είναι γραμμική.}$$

$$\text{Παρατηρούμε ότι } g^{-1} \in O(3)$$

Αρκεί να δείξω ότι :

$$\langle g^{-1}(v), g^{-1}(w) \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^3$$

Δίνω συν (1) $x = g^{-1}(v)$ και $y = g^{-1}(w)$

$$\langle g(g^{-1}(v)), g(g^{-1}(w)) \rangle = \langle g^{-1}(v), g^{-1}(w) \rangle \quad (\Rightarrow)$$

$$\langle v, w \rangle = \langle g^{-1}(v), g^{-1}(w) \rangle$$

g αντιστρέφει

Συνεπώς f αντιστρέφει

Θα δείξω ότι $f^{-1} \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$

$$f^{-1} = (T_v \circ g)^{-1} = \underbrace{g^{-1}}_{\text{Isom}} \circ \underbrace{T_v^{-1}}_{\text{Isom}}$$

Isomorphism and inverse Isomorphism

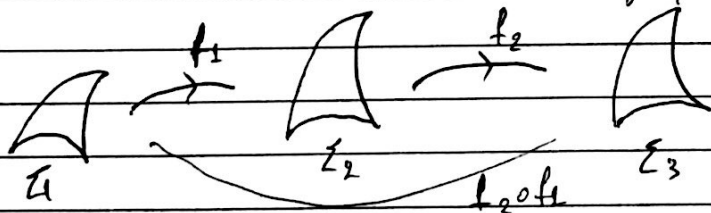
$$f(\xi) = \tilde{\xi} \Leftrightarrow f^{-1}(\tilde{\xi}) = \xi$$

$$f^{-1} \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$$



• Μεταβατικότητα Αν ξ_1 είναι γειρ. λογαρο $f \in \xi_2$
και ξ_2 - " - ξ_3 ,

τότε ξ_1 είναι γειρ. λογαρο $f \in \xi_3$



$$f_1 \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3), f_2 \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$$

$$f_1(\xi_1) = \xi_2$$

$$f_2(\xi_2) = \xi_3$$

$$f_2 \circ f_1 \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$$

$$f_2 \circ f_1(\xi_1) = f_2(f_1(\xi_1)) = f_2(\xi_2) = \xi_3$$

Ανισο ξ_4

ΑΤΘΗΝΑ 01/2
7/2/2012

$$(\text{Isom}(\mathbb{R}^3), \circ)$$

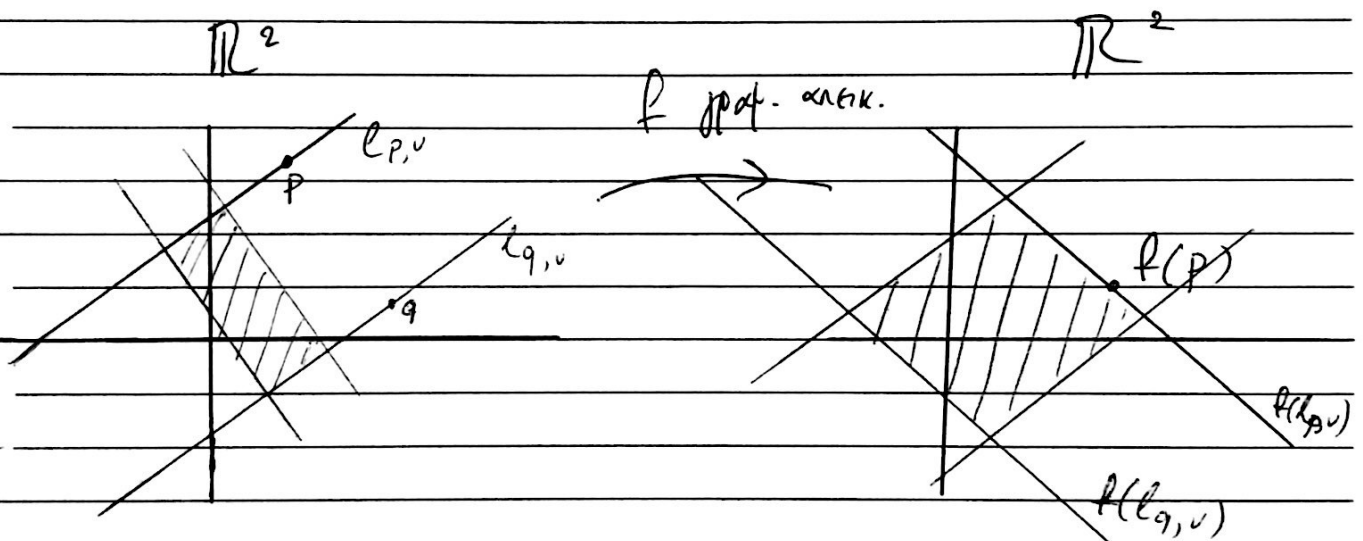
$$(f, g) \mapsto f \circ g$$

$$\leadsto (f_1 \circ f_2) \circ f_3 = f_1 \circ (f_2 \circ f_3)$$

$$\leadsto f \circ \text{Id} = \text{Id} \circ f = f$$

$$\leadsto f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{Id}$$

~



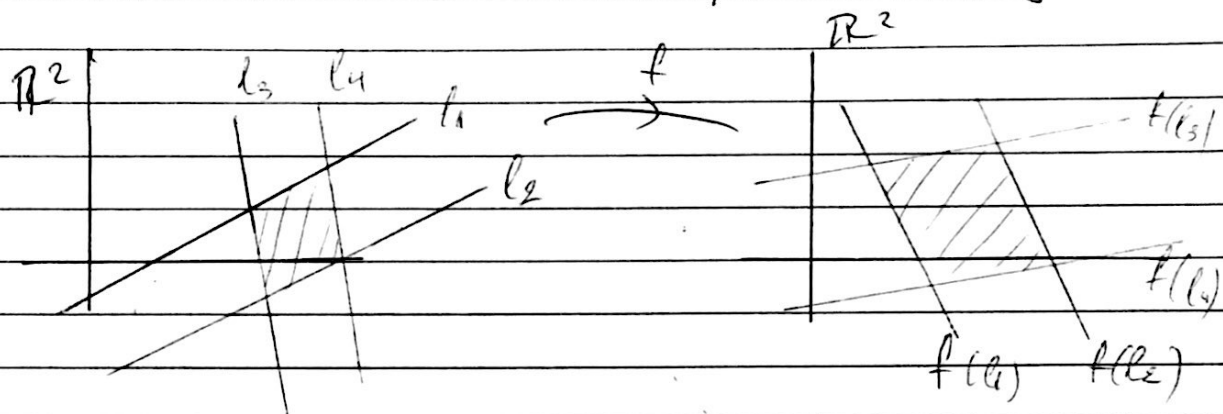
$$l_{p,v} = \{p + t v \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad v \neq 0$$

$$f(l_{p,v}) = \{f(p + t v) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{f(p) + t f(v) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

- $\forall v \quad f(v) \neq 0$, τότε $f(l_{p,v})$ ευθεία $\parallel f(v)$
- $\forall v \quad f(v) = 0$, τότε $f(l_{p,v}) = \{f(p)\}$

Τηλ 0944 0191

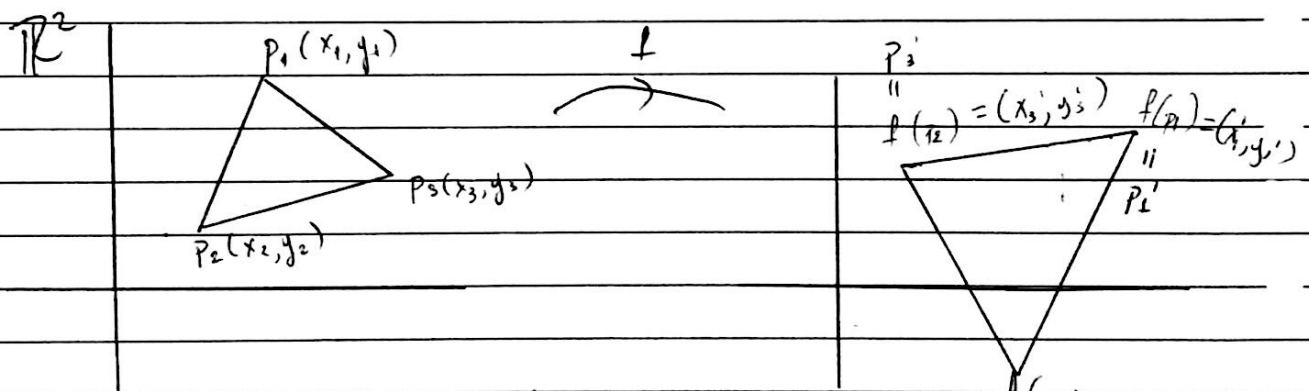
$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\perp \perp$ in 160 Suraf $\text{Ker } f = \{0\}$



$$l_1 \parallel l_2 \Rightarrow f(l_1) \parallel f(l_2)$$

$$l_3 \parallel l_4 \Rightarrow f(l_3) \parallel f(l_4)$$

Αντικείμενα παράλληλα $\in$ αντικείμενα και εγγραφή σε εγγραφή



$$\text{Πηλίκος } (p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix}$$

Εάν οι $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ (και ο αντιστρεψίμος) f ως προς το συντελεστή βάσης του $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, \quad i=1,2,3 \quad (*)$$

$$\text{Η βασ. } (p_1' p_2' p_3') = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} = \dots \quad (*)$$

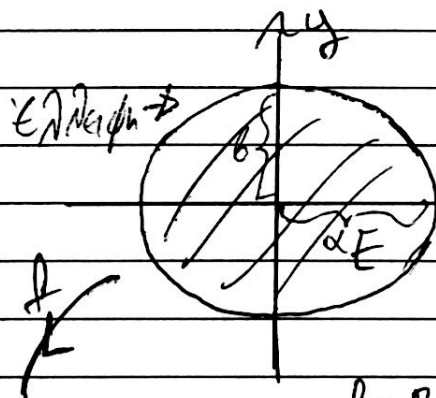
$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}) & x_1 & y_1 & 1 \\ & x_2 & y_2 & 1 \\ & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= |\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}| \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \text{...}$$

Επομένως, $\boxed{\text{Η βασ. } (p_1' p_2' p_3') = |\det f| \cdot \text{Η βασ. } (p_1 p_2 p_3)}$

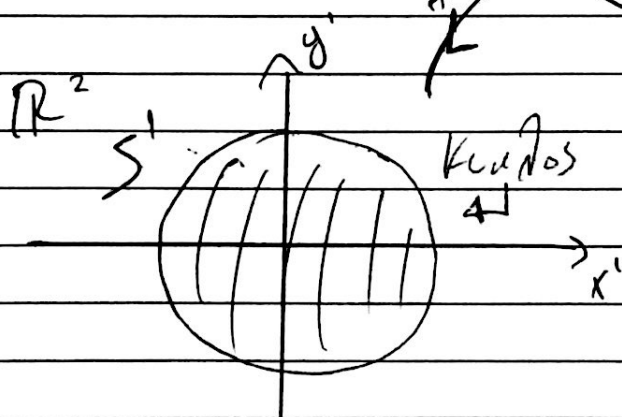
→ $\boxed{\text{Η βασ. } f(Z) = |\det f| \cdot \text{Η βασ. } (Z)}$ ←

ΕΦΑΡΜΟΓΗ



$$E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow x \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 = 1 \quad (*)$$



$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b} \right) = (x', y')$$

Given map. f is linear
 $\begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{pmatrix}$ as Δ is
 in $\mathbb{R}^2$ basis

$$\text{Εμβαδο } (f(\mathcal{E})) = |\det f| \text{ Εμβαδο } (\mathcal{E}) \Leftrightarrow$$

$$\pi = \frac{1}{\alpha\beta} \text{ Εμβαδο } (\mathcal{E}) \Leftrightarrow$$

$$\text{Εμβαδο } (\mathcal{E}) = \pi \alpha\beta$$

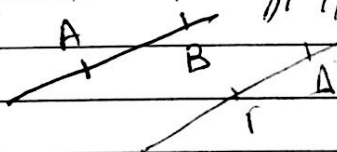
Διακρίβη των Στερεομετρίας ή Γεωμετρίας

Προαναλογιστική εμβαδών

ΟΡΙΣΜΟΣ
 $A \equiv B$

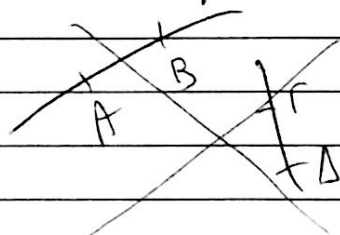
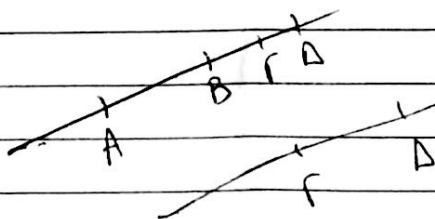
Καλούμε προαναλογιστική εμβαδών τμήμα με αρχή το
 τμήμα A με πέρας το τμήμα B το εμβαδόν
 τμήμα με άκρα A, B , τον οποίον έχουμε ορίσει ως
 αντίστροφο διακρίβη για άκρα του. Συμβολίζουμε με $\underline{AB}$.
 Φορτίς $AB \neq BA$ είναι αν $A \neq B$

- Φορτίς ενός προαναλογιστικού εμβαδών τμήματος είναι η ευθεία
 που το περνάει.

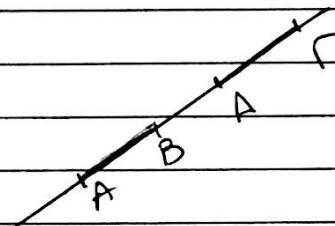
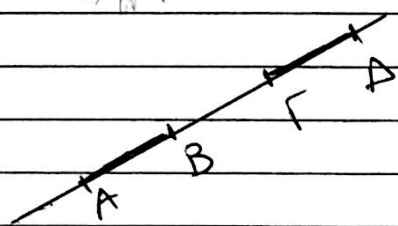
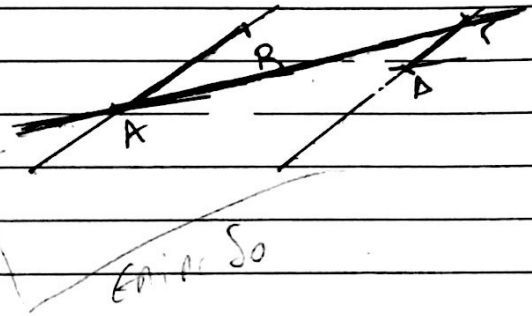
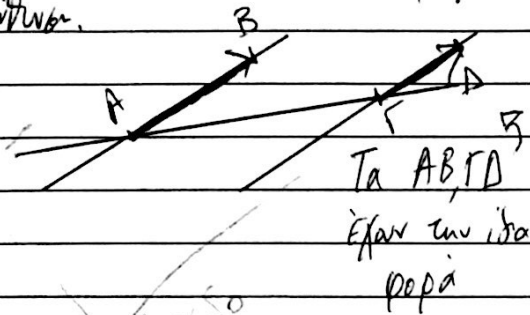


- Διευθύνση

Δύο προαναλογιστικά εμβαδών AB και CD λέγεται ότι έχουν την
 ίδια διευθύνση αν οι φορτίς τους είναι ευθείες παράλληλες
 ή ταυτίζονται.



Έστω τα ημιεπίπεδα επί της ευθείας AB να τα Π_1 και Π_2 έχουν την ίδια διεύθυνση.

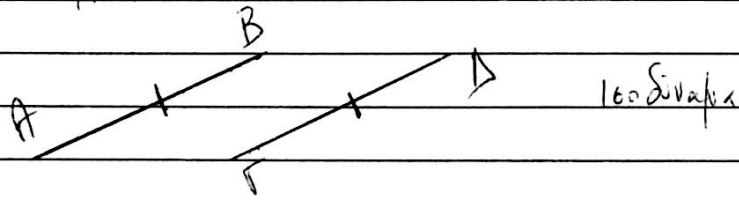


“Διήκων” προανατολόμενον επί της ευθείας AB είναι το μήκος του “τμήματος” AB .

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δύο προανατολόμενα ενδύο ημιεπίπεδα να ληφθούν ισοδύναμα (ή ισότιμα) αν και μόνο αν:

- (i) έχουν την ίδια διεύθυνση
- (ii) έχουν την ίδια πορεία
- (iii) έχουν το ίδιο μήκος

Π.Α.



08/03/2018

Προανατοκισμένα Ενδιαφέροντα Τμήματα

ΟΡΙΣΜΟΣ Δύο προανατοκισμένα ενδ. τμήματα καλούνται ισοδύναμα (ή ισότιμα) ανν έχουν:

- (i) την ίδια διεύθυνση
- (ii) την ίδια φορά
- (iii) ίδιο μέγεθος

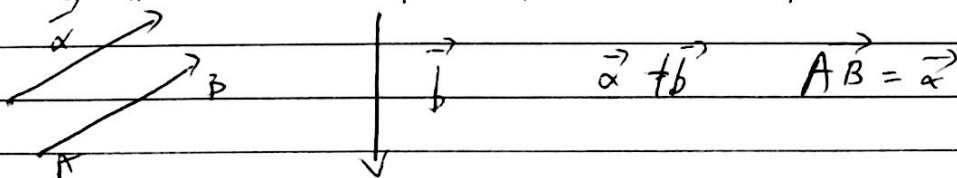
Ορίζεται π.χ. έχουν ισοδυναμία τα ενδ. των προαν. ενδ. τμήτ.

ΟΡΙΣΜΟΣ Κάθε διαύσματα κατ' αλφάβητο ισοδυναμίας π.χ. προς τα εμπρός έχουν ισοδυναμία που συμβαίνει στο έναν των προαν. ενδ. τμήτ. ενδ.

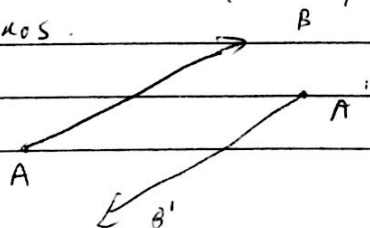
Διαύσματα $\overrightarrow{AB}$ ή (AB)
Εξωτερικά: $\vec{a}, \vec{b}, \dots$



ΟΡΙΣΜΟΣ Δύο διαύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{CD}$ καλούνται ισα αν οι αντίστοιχοι τμήτ. (δηλ. τα προβ. ενδ. τμήτ. AB, CD) είναι ισοδύναμα δηλ. έχουν ίδια φορά, διεύθυνση ή μήκος.



Για κάθε διαύσματα ορίζεται η διεύθυνση η φορά και το μήκος.



ίδια διεύθυνση
σημειώνεται

Минералов фауна

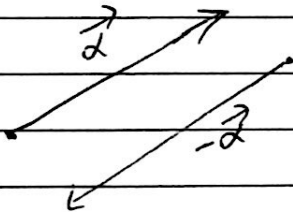
$$\vec{0} = \vec{AA}$$

{ ΠΡΟΣΟΧΗ ? Τα συνιστά
 { Σε ένα γυμνάσιο είναι εύκολο }

Примеры: $\vec{\alpha} = \vec{0} \Rightarrow \|\vec{\alpha}\| = 0 \leftarrow$

Аннотация

Καταμετρήσαμε και την δύναμη που ασκείται στο σώμα με $-\vec{\alpha}$ το οποίο έχει ίδια συνθήκες με το $\vec{\alpha}$, έτσι όπως και στην προηγούμενη περίπτωση.


$$\{0 \text{ vertices in } \vec{\sigma} \text{ give to } \vec{\sigma}'\}$$

Συμβολισμός : $\mu \in V_3$ (αξιωματικά V_2) το σύνολο των
 συνυφιστανών του χ ή μ (αξιωματικά του $\text{FAIN}(\mathcal{A})$)
πράξης το σύνολο των συνυφιστανών.

$$+ : V_3 \times V_3 \rightarrow V_3$$

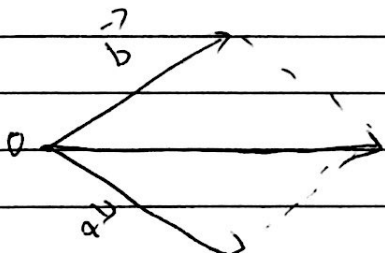
$$\bullet \quad \cdot : \mathbb{R} \times V_3 \rightarrow V_3$$

Πρσ. Θέβη

Ba Oporias no 2/pu

$$(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} + \vec{b}$$

$$(\lambda, \vec{0}) \mapsto \lambda \vec{e}_1$$



Το $\delta\alpha\upsilon\sigma\eta\kappa\alpha$ $\lambda\alpha^2$ $\gamma\iota\upsilon\omega$ $\epsilon\iota\varsigma$ $\tau\omicron$
 $\delta\alpha\upsilon\sigma\eta\kappa\alpha$ $\alpha\omega$: (i) $\epsilon\chi\eta$ $\mu\iota\kappa\alpha\varsigma$ $\|\lambda\alpha^{-2}\| = \|\lambda\|/\|\alpha^2\|$
 (ii) $\text{An } \lambda \neq 0$ $\epsilon\chi\eta$ $\tau\omega$ η $\delta\epsilon$ $\delta\iota\delta\omega\sigma\eta$ $\mu\epsilon$ $\omega\alpha^2$
 $\mu\epsilon$ η $\delta\epsilon$ $\rho\alpha\pi\alpha$ $\mu\epsilon\tau\omega$ $\alpha\varsigma$ $\lambda > 0$ $\mu\epsilon$ $\alpha\lambda\omega\tau\eta$
 $\alpha\varsigma$ $\lambda < 0$

! ! !

- $-\vec{a} = (-1) \cdot \vec{a}$
 - $\lambda \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \vec{a} = \vec{0}$
- $\left\{ \begin{array}{l} \Delta \alpha \text{ ή } \mu \alpha \text{ } \mu \\ \text{δυνατότητα ή αδυναμία} \end{array} \right\}$

Ιδιότητες Πηλίκων

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (μεταθετική)
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (προσεταιριστική)
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
- $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$
- $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$
- $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

0 Άρα $\forall \vec{a}$ (αυτοίχοι $\vec{a}_2$) είναι $\delta \chi$ με αρχή $\vec{a}$ + $\vec{0}$.

Ορίζεται όπως και η αφαίρεση ως εξής:
 $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

Γραμμικός συνδυασμός είναι κάθε συνάρτηση της μορφής
 $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$
 $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$

Μυστικός γρ. συνδυασμός

$$0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{a}_k = \vec{0}$$

! ! !

ΟΡΙΣΜΟΣ Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ καλούνται γρ. εξαρτημένα (ΓΕ) αν $\exists$ αριθμοί $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (και) μηδενιστών, τέτοιων ώστε $\neq 0$ και $\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0}$

=

↑

Topologie T_n flächig $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ unabhängig, pp. auf Σ (F.A.)
 d.h. $\lambda_1 \vec{\alpha}_1 + \dots + \lambda_n \vec{\alpha}_n \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

ΠΡΟΤΑΣΗ Δινομένη τα διανύσματα $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n, \dots, \vec{\alpha}_{n+k}$

(i) αν $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ είναι Γ.Ε. τότε

$\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n, \dots, \vec{\alpha}_{n+k}$ είναι Γ.Ε. Π. ΠΡΟΣΟΧΗ !

(ii) αν $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_{n+k}$ είναι Γ.Α. τότε

$\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n$ είναι Γ.Α.

ΑΠΟΤΑΞΗ Διο. διαίρεση των π. & βαρύντων αν έχουν εν
ία σύνθεση (συγγραφική)

ANNAKEIN

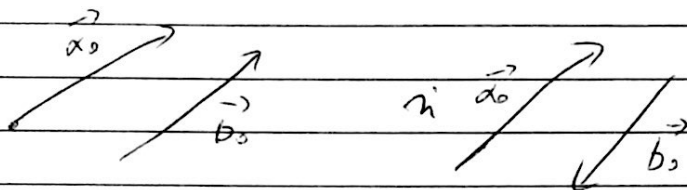
Für $\alpha \neq 0$ und $\vec{a} \perp \vec{b}$ gilt F.E. mit $\exists \lambda, \mu:$
 $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ und $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \vec{0}$
Für $\lambda \neq 0$ und $\lambda \vec{a} = -\mu \vec{b}$
 $\Rightarrow \frac{1}{\lambda} (\lambda \cdot \vec{a}) = \frac{1}{\lambda} (-\mu \vec{b}) \Leftrightarrow \vec{a} = \left(-\frac{\mu}{\lambda} \right) \vec{b}$
 $\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ sind linear abhängig

~~17. POTASH~~ ~~The lavas are, and give off very large quantities~~
~~of gas as you approach the line above.~~

~~DPZALOS~~ ~~For a square matrix $\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ we have $\det(A) = 0$ $\iff$ $a_1 = \dots = a_n = 0$~~

Εάν οι $\vec{a}, \vec{b}$ έχουν την ίδια διεύθυνση
 γινόμενα οι $\vec{a} \neq 0$ και $\vec{b} \neq 0$
 $\vec{a}_0 = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a}$, $\vec{b}_0 = \frac{1}{\|\vec{b}\|} \vec{b}$
 • $\vec{a}_0, \vec{b}_0$ έχουν την ίδια διεύθυνση

$$\|\vec{\alpha}_0\| = \left\| \frac{1}{\|\vec{\alpha}\|} \vec{\alpha} \right\| = \frac{1}{\|\vec{\alpha}\|} \|\vec{\alpha}\| \Rightarrow \|\vec{\alpha}_0\| = 1 = \|\vec{b}_0\|$$



$$\vec{\alpha}_0 = \vec{b}_0 \quad \text{ή} \quad \vec{\alpha}_0 = -\vec{b}_0$$

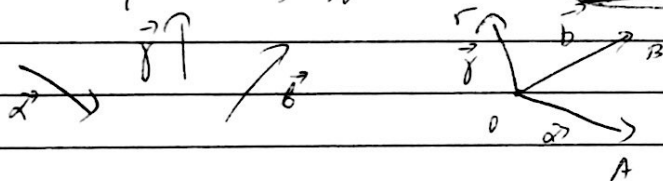
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\|\vec{\alpha}\|} \vec{\alpha} = \frac{1}{\|\vec{b}\|} \vec{b} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{\|\vec{\alpha}\|} \vec{\alpha} = -\frac{1}{\|\vec{b}\|} \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\|\vec{\alpha}\|} \vec{\alpha} + \frac{1}{\|\vec{b}\|} \vec{b} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{\|\vec{\alpha}\|} \vec{\alpha} - \frac{1}{\|\vec{b}\|} \vec{b} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{\alpha}, \vec{b} \text{ are collinear}$$

ΠΡΟΣΗΛΟΓΗ

Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ कहलवत συγκολλημένα αν και ιεχίον το F.S.S.



$$\vec{OA} = \vec{\alpha}, \quad \vec{OB} = \vec{b}, \quad \vec{OG} = \vec{\gamma}$$

Τα σημεία O, A, B, Γ είναι συγγραμμά.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Τρία διανύσματα είναι collinear αν και συγγραμμά.

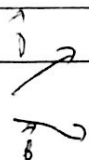
ΠΡΟΤΙΜΑ

Τρία διανύσματα είναι collinear αν και συγ είναι συγγραμμά.

ΑΔΕΥΧΗ

Έστω αν τα $\vec{\alpha}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ είναι collinear.

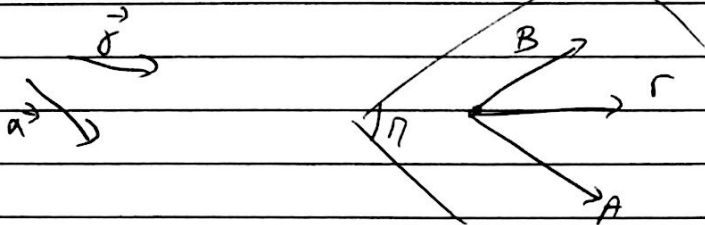
$$\text{Υποθέτω αν } \vec{\alpha} = \lambda \vec{b} + \mu \vec{\gamma}$$



$$\vec{OB} = \vec{b}, \quad \vec{OG} = \vec{\gamma}$$

$$\begin{array}{l|l} \vec{AB} = \vec{OB'} & \text{τοτε } \vec{a} = \vec{OA} \text{ αν } OB'AF' \text{ ημικο} \\ \vec{AF} = \vec{OF} & \Rightarrow O, A, B, \Gamma \text{ συνευθειακα} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma} \text{ συνευθειακα} \end{array}$$

Αντιθέτως, εαν τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ ειναι συνευθειακα εν.



$$\vec{OA} = \vec{a}$$

$$\vec{OB} = \vec{b}$$

$$\vec{OF} = \vec{\gamma}$$

O, A, B, Γ συνευθειακα

$A, \vec{a}, \vec{b}$ ειναι Γ.Ε τοτε τοτε

Υποθετω οτι $\vec{a}, \vec{b}$ ειναι Γ.Α.

Οποτε τα παραλληλα ευθειακα ειναι $OA' \parallel OB$ και $OF' \parallel OA$
τοτε το $OA'F'\Gamma'$ ειναι ημικο

$$\vec{\gamma} = \vec{OF} = \vec{OA'} + \vec{A'F'} + \vec{F'\Gamma'}$$

$$\text{αφ' ου } \vec{OA'} = \lambda \vec{OA} = \lambda \vec{a}$$

$$\text{και } \vec{OF'} = \mu \vec{OB} = \mu \vec{b}$$

$$\text{Αρα } \vec{\gamma} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma} \text{ Γ.Ε.}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

(4)

δυναμικα τα $\vec{v}_3$ ειναι αλληλογραμμικα

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(3)

δυναμικα τα $\vec{v}_2$ ειναι αλληλογραμμικα

Οποτε δυναμικα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ ον ειναι ον ειναι Γ.Ε.

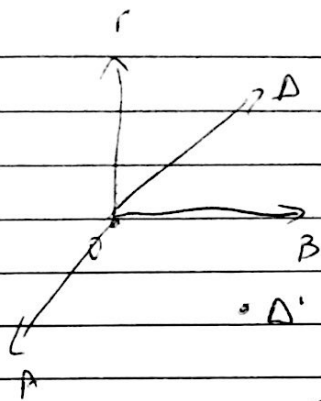
• Αφ' ου $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ ειναι Γ.Ε $\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ ειναι Γ.Ε

• Υποθετω οτι $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ ειναι Γ.Α

Οποτε εφ' ου O, A, B, Γ ειναι $\vec{OA} = \vec{a}$ $\vec{OB} = \vec{b}$ $\vec{OF} = \vec{\gamma}$

τοτε τα O, A, B, Γ ειναι ειναι $\vec{OD} = \vec{\delta}$ συνευθειακα

LD



Θέλουμε να δείξουμε ότι $DD' \parallel ab$ και ότι D' ανήκει
 στο επίπεδο που περνάει από a, b

Παρατηρούμε ότι $DD' \parallel ab$. Έτσι $DD' \parallel ab$
 Είναι λοιπόν οι ευθείες $\vec{D} = \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OB}$
 στο επίπεδο που περνάει από a, b , άρα και D'

Επίσης $OA'D'B'$

$$\vec{OD'} = \vec{OA'} + \vec{OB'}$$

$$\text{Άρα } \vec{D} = \vec{OA'} + \vec{OB'} + \vec{OD'}$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}$$

$$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{D} \text{ είναι l.i.e.}$$

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ $\dim V_3 = 3$ και $\dim V_2 = 2$



Βάση (ως διατεταγμένη λίστα) είναι ένα σύνολο $\{e_1, \dots, e_n\}$
 που το $\mathbb{R}^n$ είναι το άθροισμα των e_i .

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω V $\mathbb{R}^n$ διάστημα $\dim V = n$

και $\{e_1, \dots, e_n\}$ είναι μια βάση.

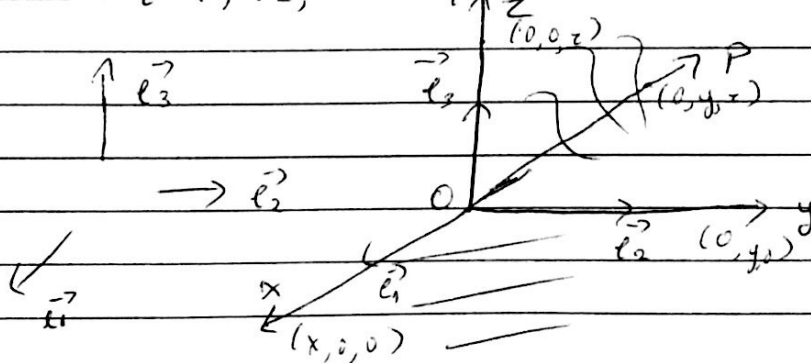
Τότε για $x \in V$ υπάρχουν μοναδικά αριθμοί

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ ώστε } x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$$

Οι αριθμοί $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ कहते हैं συντεταγμένες του x ως

προς $\{e_1, \dots, e_n\}$

Έστω $\{e_1, e_2, e_3\}$ μια κανονική βάση στο V_3



Έστω P τυχαίο σημείο. Το διάνυσμα $\vec{OP}$ καλείται
Διάνυσμα θέσης του σημείου P .

Πάντα το διάνυσμα $\vec{OP}$ εκφράζεται γραμμικά ως συνάρτηση
 $\vec{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$

$$P \sim \vec{OP} \rightarrow (x, y, z)$$

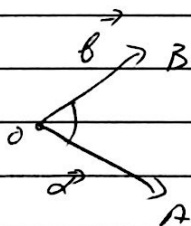
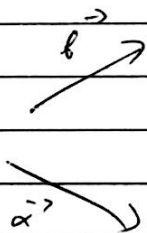
Τα σημεία του χώρου (τα σημεία του $\mathbb{R}^3$) βρίσκονται σε 1-1
 με μια ακολουθία με τρία στοιχεία $(\mathbb{R}^3)$ ή στην $\mathbb{R}^3$

$$\left(\begin{array}{l} \vec{OA} = \vec{e}_1, \quad \vec{OA'} = x\vec{e}_1, \quad \vec{OB} = \vec{e}_2, \quad \vec{OB'} = y\vec{e}_2 \\ \vec{OC} = \vec{e}_3, \quad \vec{OC'} = z\vec{e}_3 \end{array} \right)$$

Τα τρία στοιχεία (x, y, z) αντιστοιχούν με τα
 σημεία P ως προς τις βάσεις $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

Γνωστά διανύσματα

ΟΡΙΣΜΟΣ Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$



$$\vec{OA} = \vec{a}$$

$$\vec{OB} = \vec{b}$$

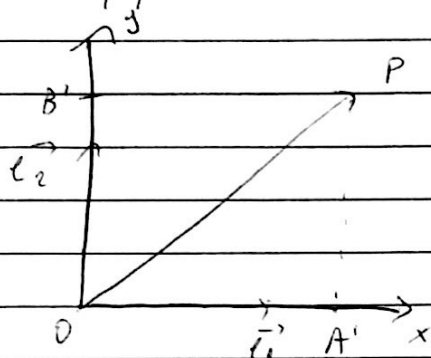
για να αντιστοιχούν $\vec{a}, \vec{b}$ και η γωνία $\angle AOB$
 $(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi]$

διεγερση > για $\vec{a}, \vec{b}$ και η γωνία $\angle AOB$
 η συνάρτηση $\cos$

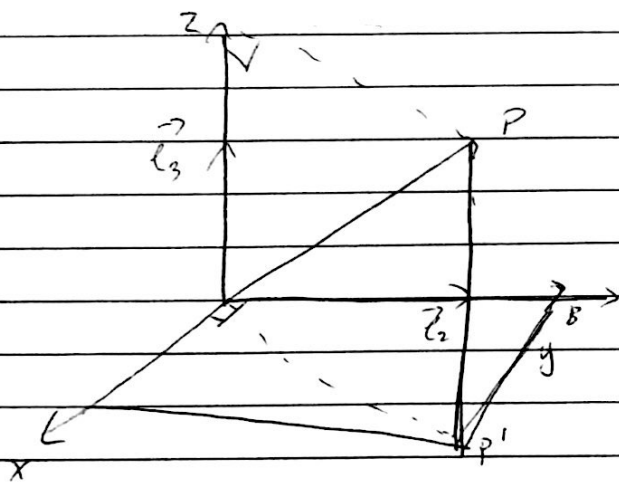


Ορθογώνια βέκτορες

ΟΡΙΣΜΟΣ Μία βέκτη καλείται **ορθογώνια** (αφροκωνική) όταν τα συνιστώσες της είναι παράλληλα με την ορθογώνια με δύο διευθετημένα



$$\begin{aligned}\vec{OP} &= x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \\ \vec{OP} &= \vec{OA'} + \vec{OB'} \\ \vec{OA'} &= x\vec{e}_1 \\ \vec{OB'} &= y\vec{e}_2\end{aligned}$$



$$\vec{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

$$\|\vec{OP'}\|^2 = \|\vec{OA'}\|^2 + \|\vec{OB'}\|^2$$

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \\ \vec{P'P} &= \vec{OP} - \vec{OP'} = z\vec{e}_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\vec{OP'}\|^2 &= \|\vec{OA'}\|^2 + \|\vec{OB'}\|^2 = \|x\vec{e}_1\|^2 + \|y\vec{e}_2\|^2 \Rightarrow \\ \|\vec{OP'}\|^2 &= x^2 + y^2\end{aligned}$$

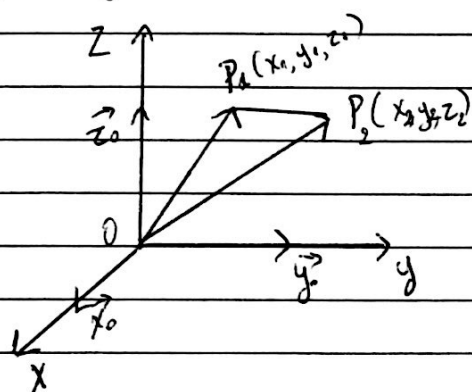
$$\begin{aligned}\|\vec{OP}\| &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= d(O, P)\end{aligned}$$

13/03/2018

Καρτεσιανή συντεταγμένη

Θεωρούμε ορθοκανονικά διανύσματα

$$\{\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$$



Συντεταγμένες του P ως προς το
βάση O, x, y, z είναι η τριάδα
 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{OP} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$$

Εάν τα σημεία

$$P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$$

$$\vec{P_1P_2} = \vec{OP_2} - \vec{OP_1} = (x_2\vec{x}_0 + y_2\vec{y}_0 + z_2\vec{z}_0) - (x_1\vec{x}_0 + y_1\vec{y}_0 + z_1\vec{z}_0)$$

$$\text{Άρα } \vec{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\vec{x}_0 + (y_2 - y_1)\vec{y}_0 + (z_2 - z_1)\vec{z}_0$$

$P(x, y, z)$ x συντεταγμένη του P, y συντεταγμένη του P,
z συντεταγμένη του P

$$d(P_1, P_2) = \|\vec{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \leftarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r} = \alpha_1\vec{x}_0 + \alpha_2\vec{y}_0 + \alpha_3\vec{z}_0 \\ \|\vec{r}\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} \end{array} \right\}$$

V_3

$$\vec{\alpha} = \alpha_1 \vec{x}_0 + \alpha_2 \vec{y}_0 + \alpha_3 \vec{z}_0 \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

$$\vec{b} = b_1 \vec{x}_0 + b_2 \vec{y}_0 + b_3 \vec{z}_0 \quad (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{\alpha} + \vec{b} = (\alpha_1 + b_1) \vec{x}_0 + (\alpha_2 + b_2) \vec{y}_0 + (\alpha_3 + b_3) \vec{z}_0 \quad (\alpha_1 + b_1, \alpha_2 + b_2, \alpha_3 + b_3)$$

$$\lambda \vec{\alpha} = (\lambda \alpha_1) \vec{x}_0 + (\lambda \alpha_2) \vec{y}_0 + (\lambda \alpha_3) \vec{z}_0 \quad (\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \lambda \alpha_3)$$

Σημείωση

$$\vec{\alpha} = \alpha_1 \vec{x}_0 + \alpha_2 \vec{y}_0 + \alpha_3 \vec{z}_0 \\ = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

Ερωτήματα σχετικά με V_3

ΟΡΙΣΜΟΣ

Καλούμε εσωτερικό γινόμενο των $\vec{\alpha}, \vec{b} \in V_3$ το αριθμ.

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{b} \rangle = \frac{1}{2} \{ \|\vec{\alpha} + \vec{b}\|^2 - \|\vec{\alpha}\|^2 - \|\vec{b}\|^2 \}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

$A_v \{ \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0 \}$ είναι ορθογ. βάση και

$$\vec{\alpha} = \alpha_1 \vec{x}_0 + \alpha_2 \vec{y}_0 + \alpha_3 \vec{z}_0, \quad \vec{b} = b_1 \vec{x}_0 + b_2 \vec{y}_0 + b_3 \vec{z}_0$$

Τότε ισχύει: $L_P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad L_P = (b_1, b_2, b_3)$

$$\Rightarrow \forall \langle \vec{\alpha}, \vec{b} \rangle = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 \quad \forall$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{b} \rangle = \frac{1}{2} \{ (\alpha_1 + b_1)^2 + (\alpha_2 + b_2)^2 + (\alpha_3 + b_3)^2$$

$$- (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) - (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \}$$

$$= \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3$$

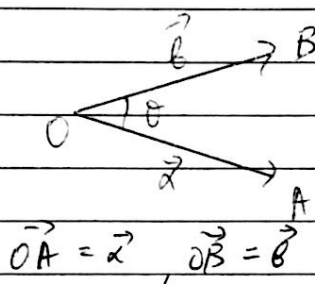
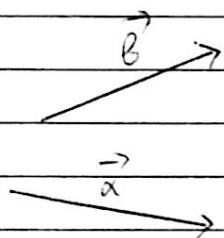
Solutions

(i) $\langle \vec{x}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle$

(ii) $\langle \lambda \vec{x} + \mu \vec{b}, \vec{y} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \mu \langle \vec{b}, \vec{y} \rangle$

(iii) $\langle \vec{x}, \lambda \vec{b} + \mu \vec{y} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{b} \rangle + \mu \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

(iv) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$ and $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

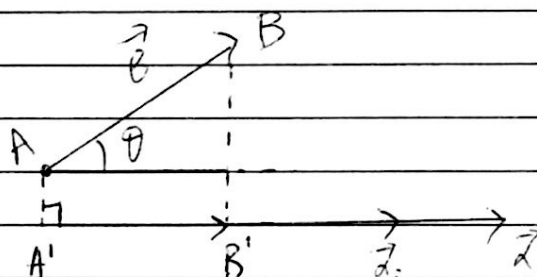


$\vec{x} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$

$\theta = \angle(\vec{x}, \vec{b}) \in [0, \pi]$

if (1) or (2) is satisfied then
 $\angle(\vec{x}, \vec{b}) = \angle(\vec{x}, \vec{b})$

Definition of the scalar product $\vec{x}, \vec{b}$



Orthogonal to the vector

$\vec{x}_0 = \frac{1}{\|\vec{x}\|} \vec{x}$

$\vec{A'B} = \vec{b}$

$\vec{A'B'}$ is the projection of $\vec{b}$ onto $\vec{x}$

And $\theta = \angle(\vec{x}, \vec{b})$ and $\|\vec{A'B'}\| = \|\vec{b}\| \cos \theta$

$\vec{A'B'} = \underbrace{\|\vec{b}\|}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\cos(\angle(\vec{x}, \vec{b}))}_{\in \mathbb{R}} \vec{x}_0$

$\hookrightarrow$

Ο άπειρος $\|\vec{b}\| \cos(\vec{a}, \vec{b})$ ονομάζεται ΠΡΟΒΟΛΗ του $\vec{b}$ στο $\vec{a}$ και συμβολίζεται με:

$$\rightarrow \left| \frac{\vec{b}}{\vec{a}} = \|\vec{b}\| \cos(\vec{a}, \vec{b}) \right| \leftarrow$$

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$.

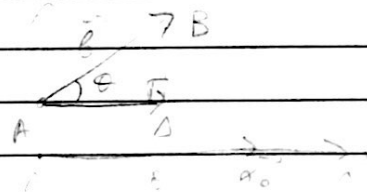
Τότε ισχύει:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{b} \cdot \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \cdot \vec{b}$$

ΑΠΟΚΛΕΙΣΗ Θέτουμε ορθογ. βάση u, v, z

$$\vec{x}_0 = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

$\vec{y}_0, \vec{z}_0$



$$\vec{a} = \|\vec{a}\| \vec{x}_0 = \|\vec{a}\| \vec{x}_0 = (\|\vec{a}\|, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} \vec{b} &= \vec{AB} = \vec{AA'} + \vec{A'B} = \vec{AA'} + \vec{A'B} \\ &= \|\vec{b}\| \cos(\vec{a}, \vec{b}) \vec{x}_0 + (0 \vec{x}_0 + * \vec{y}_0 + * \vec{z}_0) \end{aligned}$$

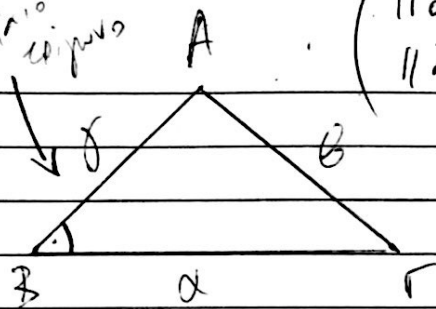
$$\Rightarrow \vec{b} = (\|\vec{b}\| \cos(\vec{a}, \vec{b}), *, *)$$

$$\text{Άρα } \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

ΠΕΡΙΣΗΜΑ $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle &= 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ είναι ορθογ.} \end{aligned}$$

Τριγωνισμός



$$\begin{cases} \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \|\vec{b}\|^2 \\ \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 - 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \|\vec{b}\|^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \|\vec{AB}\|^2 = \|\vec{AB} + \vec{B\Gamma}\|^2 \\ &= \|\vec{B\Gamma} - \vec{BA}\|^2 \\ &= \|\vec{B\Gamma}\|^2 - 2\langle \vec{B\Gamma}, \vec{BA} \rangle + \|\vec{BA}\|^2 \end{aligned}$$

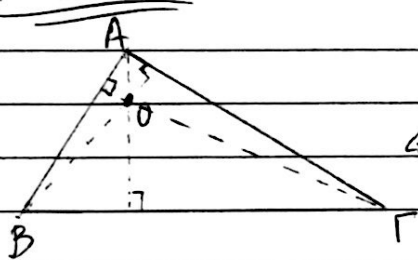
Άρα $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\cos\theta$

Νόμος των συνημιτόνων

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΠΡΟΤΗΜΑ Τα ύψη τριγώνων συντρέχουν.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Έστω ότι $OA \perp B\Gamma$ και $OB \perp A\Gamma$

$$\langle \vec{OA}, \vec{B\Gamma} \rangle = 0 \text{ και } \langle \vec{OB}, \vec{A\Gamma} \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\langle \vec{OA}, \vec{O\Gamma} - \vec{OB} \rangle = 0 \text{ και } \langle \vec{OB}, \vec{O\Gamma} - \vec{OA} \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \langle \vec{OA}, \vec{O\Gamma} \rangle - \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle = 0 \\ \langle \vec{OB}, \vec{O\Gamma} \rangle - \langle \vec{OB}, \vec{OA} \rangle = 0 \end{cases} \quad (*)$$

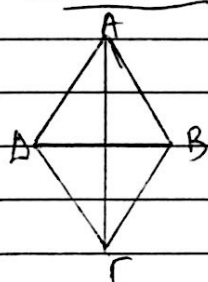
$$\Leftrightarrow \langle \vec{OA}, \vec{O\Gamma} \rangle - \langle \vec{OB}, \vec{O\Gamma} \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle \vec{OA} - \vec{OB}, \vec{O\Gamma} \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle \vec{BA}, \vec{O\Gamma} \rangle = 0 \Leftrightarrow O\Gamma \perp AB$$

9) Έστω $AB\Gamma\Delta$ παραλλ. Είναι ρηθός $\Leftrightarrow \underline{DB \perp A\Gamma}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



$$DB \perp A\Gamma \Leftrightarrow \langle \vec{A\Gamma}, \vec{B\Delta} \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle \vec{AO} + \vec{O\Gamma}, \vec{BO} + \vec{OD} \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\langle \vec{AO} + \vec{O\Gamma}, \vec{AO} + \vec{BA} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{O\Gamma} = -\vec{BA}$$

$$\Leftrightarrow \langle \vec{AO} - \vec{BA}, \vec{AO} + \vec{BA} \rangle = 0$$

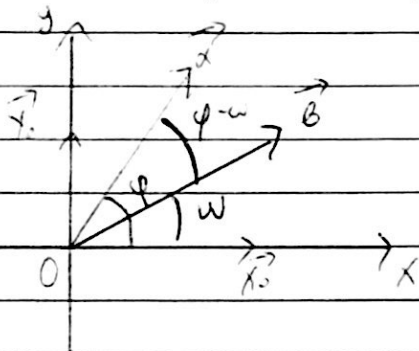
$$\Leftrightarrow \|\vec{AO}\|^2 = \|\vec{BA}\|^2 \text{ γατι}$$

$$\langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2$$

$$\|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2 = 0 \Leftrightarrow \|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$$

(3)

$$\cos(\varphi - \omega) = \cos\varphi \cos\omega + \sin\varphi \sin\omega$$



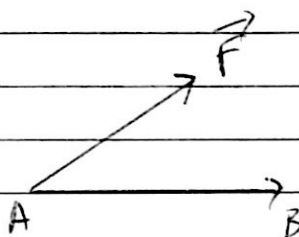
$$\vec{a} = (\cos\varphi, \sin\varphi) = \cos\varphi \vec{x}_0 + \sin\varphi \vec{y}_0$$

$$\vec{b} = (\cos\omega, \sin\omega) = \cos\omega \vec{x}_0 + \sin\omega \vec{y}_0$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \cos\varphi \cos\omega + \sin\varphi \sin\omega$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\phi \quad (\vec{a}, \vec{b}) = \cos(\varphi - \omega)$$

(4)



φ₀

$$\phi_0 = \langle \vec{F}, \vec{AB} \rangle$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εστω $\{\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$ τριπλὴ ορθογώνια

βάση τῆς V_3 . Κάθε διάνυσμα $\vec{a} \in V_3$ γράφεται ως

$$\vec{a} = \langle \vec{a}, \vec{x}_0 \rangle \vec{x}_0 + \langle \vec{a}, \vec{y}_0 \rangle \vec{y}_0 + \langle \vec{a}, \vec{z}_0 \rangle \vec{z}_0$$

ΑΡΧΗ

$$\vec{a} = \kappa \vec{x}_0 + \lambda \vec{y}_0 + \mu \vec{z}_0$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}, \vec{x}_0 \rangle &= \langle \kappa \vec{x}_0 + \lambda \vec{y}_0 + \mu \vec{z}_0, \vec{x}_0 \rangle = \kappa \langle \vec{x}_0, \vec{x}_0 \rangle + \lambda \langle \vec{y}_0, \vec{x}_0 \rangle \\ &\quad + \mu \langle \vec{z}_0, \vec{x}_0 \rangle \\ &= \kappa \|\vec{x}_0\|^2 + 0 + 0 = \kappa \end{aligned}$$

Ομοίως με το $\vec{y}_0$ και το $\vec{z}_0$

V_3

Εξωτερικό γινόμενο στο V_3

ΣΤ

ΟΡΙΣΜΟΣ !

Καλούμε εξωτερικό (ή διανυσματικό) γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$ το διάνυσμα το οποίο συμβολίζεται με $\vec{a} \times \vec{b}$ που ορίζεται ως εξής:

(I) αν $\vec{a} = \vec{0}$ ή $\vec{b} = \vec{0}$, τότε $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

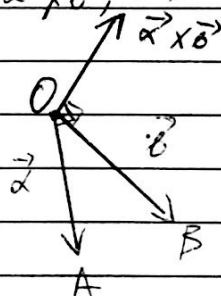
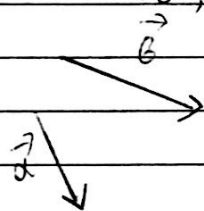
(II) αν $\vec{a} \neq \vec{0}$ και $\vec{b} \neq \vec{0}$, τότε το $\vec{a} \times \vec{b}$ είναι το διάνυσμα:

(i) που έχει μήκος

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin(\angle \vec{a}, \vec{b}) \quad \leftarrow$$

(ii) είναι ορθόγωνο προς τα $\vec{a}, \vec{b}$, δηλ. δι

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \rangle = 0 = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \rangle$$



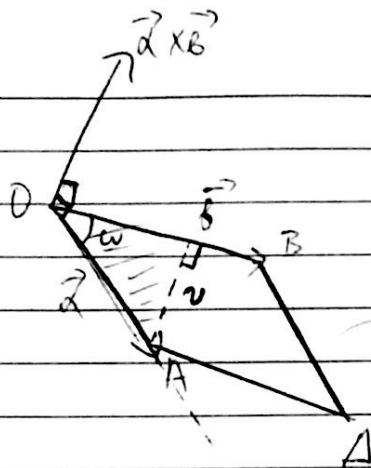
$$\begin{aligned} \vec{OA} &= \vec{a} \\ \vec{OB} &= \vec{b} \end{aligned}$$

(iii) Η βάση $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ (αν είναι βάση!!!) είναι δεξιόστροφη.

Π ΑΡΑΤΗΡΑΣΗ ! (i) Τα διανυσματα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι Γ.Ε (έχουν την ίδια διεύθυνση) $\Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

(ii) Τα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι Γ.Α. $\Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ



$$\begin{aligned} \|\vec{a} \times \vec{b}\| &= \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin w = \|\vec{b}\| (\|\vec{a}\| \sin w) \\ &= \|\vec{b}\| (\underbrace{\|\vec{OA}\| \sin w}_{\text{ύψος}}) = \|\vec{b}\| \cdot \text{ύψος} \end{aligned}$$

Συμπέρασμα: $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ (= εμβαδο) παρέρω με αντερες $\vec{a}, \vec{b}$

Υπολογισμός εσωτερικών γινόμενων

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $\{\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$ ορθοκανονική
 σεξιοσφορη βάση. Αν $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1 \vec{x}_0 + a_2 \vec{y}_0 + a_3 \vec{z}_0$
 και $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = b_1 \vec{x}_0 + b_2 \vec{y}_0 + b_3 \vec{z}_0$, τότε ισχύει:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

15/03/2018

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 (1 - \cos^2(\hat{\vec{a}}, \hat{\vec{b}}))$$

$$= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\underbrace{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos(\hat{\vec{a}}, \hat{\vec{b}})}_{\text{Εσωτερικό γινόμενο}})^2$$

Αρα $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 \geq 0$

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $\{\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$ τυχαία ορθοκανονικά διανύσματα στο V_3 .
 Αν $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1 \vec{x}_0 + a_2 \vec{y}_0 + a_3 \vec{z}_0$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = b_1 \vec{x}_0 + b_2 \vec{y}_0 + b_3 \vec{z}_0$

Τότε ισχύει :

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

Ιδιότητες των εσωτερικών γινομένων !

(i) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ ($\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$)

(ii) $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda \vec{a} \times \vec{b}$
 $\vec{a} \times (\mu \vec{b}) = \mu \vec{a} \times \vec{b}$

(iii) $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b} = \vec{a}_1 \times \vec{b} + \vec{a}_2 \times \vec{b}$
 $\vec{a} \times (\vec{b}_1 + \vec{b}_2) = \vec{a} \times \vec{b}_1 + \vec{a} \times \vec{b}_2$

(iv) $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \rangle = 0 = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \rangle$

Απόδειξη της Πρότασης

$$\vec{a} \times \vec{b} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 & (1) \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0 & (2) \end{cases}$$

↳

$$(1)b_3 + (2)(-\alpha_3) :$$

$$(\alpha_1 b_3 - \alpha_3 b_1) x_1 + (\alpha_2 b_3 - \alpha_3 b_2) x_2 = 0 \quad (3)$$

$$(1)b_1 + (2)(-\alpha_1) :$$

$$(\alpha_2 b_1 - \alpha_1 b_2) x_2 + (\alpha_3 b_1 - \alpha_1 b_3) x_3 = 0 \quad (4)$$

$$(4) + (3) \Leftrightarrow \frac{x_1}{\alpha_2 b_3 - \alpha_3 b_2} = \frac{x_2}{-(\alpha_1 b_3 - \alpha_3 b_1)} = \frac{x_3}{\alpha_1 b_2 - \alpha_2 b_1} = K$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = K(\alpha_2 b_3 - \alpha_3 b_2) \\ x_2 = -K(\alpha_1 b_3 - \alpha_3 b_1) \\ x_3 = K(\alpha_1 b_2 - \alpha_2 b_1) \end{cases}$$

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = K^2(\alpha_2 b_3 - \alpha_3 b_2)^2 + K^2(\alpha_1 b_3 - \alpha_3 b_1)^2 + K^2(\alpha_1 b_2 - \alpha_2 b_1)^2$$

$$\Rightarrow \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = K^2 \left\{ \underbrace{\alpha_2^2 b_3^2 + \alpha_3^2 b_2^2 + \alpha_1^2 b_3^2 + \alpha_3^2 b_1^2 + \alpha_1^2 b_2^2 + \alpha_2^2 b_1^2}_{-2\alpha_1 \alpha_3 b_1 b_3 - 2\alpha_1 \alpha_2 b_1 b_2 - 2\alpha_2 \alpha_3 b_2 b_3} \right\}$$

$$= K^2 \left\{ \alpha_1^2 (\|\vec{b}\|^2 - b_1^2) + \alpha_2^2 (\|\vec{b}\|^2 - b_2^2) + \alpha_3^2 (\|\vec{b}\|^2 - b_3^2) + 2 \dots \right\}$$

$$= K^2 \left\{ \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\alpha_1^2 b_1^2 + \alpha_2^2 b_2^2 + \alpha_3^2 b_3^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 b_1 b_2 + 2\alpha_1 \alpha_3 b_1 b_3 + 2\alpha_2 \alpha_3 b_2 b_3) \right\}$$

$$\text{Επομένως } \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = K^2 \left\{ \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3)^2 \right\}$$

$$= K^2 \left\{ \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 \right\}$$

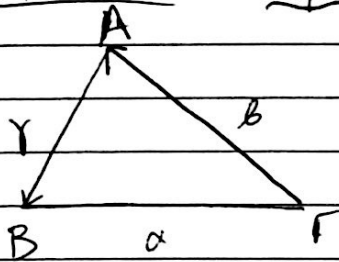
$$= K^2 \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2$$

$$\text{οπότε } K^2 = 1 \Rightarrow K = \pm 1 \Rightarrow K = 1$$

για να είναι
δεξιόστροφη η γωνία

ΕΡΑΡΜΟΓΗ

Νόμος ημίγων



$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{\Gamma}}{\gamma}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}) \times \vec{AB} = \vec{0} \times \vec{AB}$$

$$\Rightarrow \vec{AB} \times \vec{AB} + \vec{BC} \times \vec{AB} + \vec{CA} \times \vec{AB} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{BC} \times \vec{BA} = \vec{CA} \times \vec{AB}$$

$$\Rightarrow \|\vec{BC} \times \vec{BA}\| = \|\vec{CA} \times \vec{AB}\|$$

$$\Rightarrow a \gamma \sin \hat{B} = b \gamma \sin(\pi - \hat{A})$$

$$\Rightarrow a \sin \hat{B} = b \sin \hat{A}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Σημείωση: } \langle \vec{a}, \vec{x}_0 \rangle = \cos \varphi \\ \|\vec{a}\| \|\vec{x}_0\| \cos \kappa(\vec{a}, \vec{x}_0) = \cos \varphi \\ \Rightarrow \kappa(\vec{a}, \vec{x}_0) = \rho \end{array} \right)$$

Άσκηση

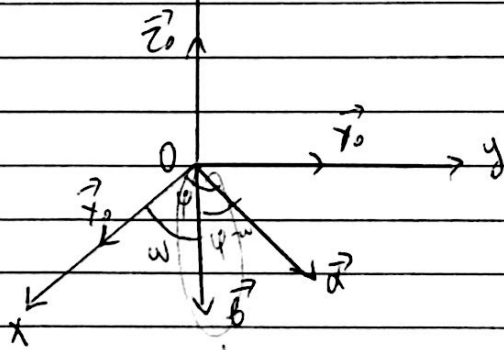
Να αποδείξει ότι $\sin(\varphi - \omega) = \sin \varphi \cos \omega - \sin \omega \cos \varphi$

Απόδειξη:

Θέτουμε τα διανύσματα

$$\vec{a} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) = \cos \varphi \vec{x}_0 + \sin \varphi \vec{y}_0 + 0 \vec{z}_0$$

$$\vec{b} = (\cos \omega, \sin \omega, 0)$$



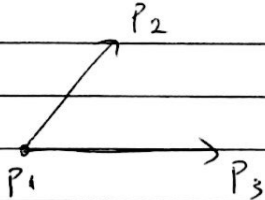
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ \cos \omega & \sin \omega & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, \sin \varphi \cos \omega - \sin \omega \cos \varphi) = (\sin \varphi \cos \omega - \sin \omega \cos \varphi) \vec{z}_0$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a} \\ \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \lambda \vec{z}_0, \lambda > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \lambda \\ \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin(\varphi - \omega) \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = \sin(\varphi - \omega)$$

Εφαρμογές των εσωτερικά γινόμενων

(i) Πότε τα σημεία $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=1,2,3$
είναι συνευθειακά;



Απάντηση: Τα P_1, P_2, P_3 είναι συνευθειακά

$$\Leftrightarrow \vec{P_1P_2}, \vec{P_1P_3} \text{ είναι Γ.Ε}$$

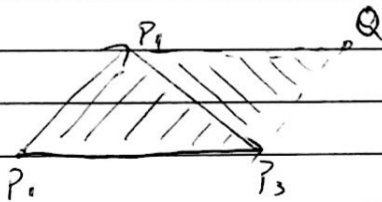
$$\Leftrightarrow \vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3} = \vec{0}$$

$$\text{με } \vec{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\vec{P_1P_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

(ii) Υπολογισμός εμβαδών τριγώνων

Δίνεται το τρίγωνο $\triangle P_1P_2P_3$ με κορυφές $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=1,2,3$
Να υπολογιστεί το εμβαδό του.



Απάντηση: $\text{Εμβαδ.}(\triangle P_1P_2P_3) = \frac{1}{2} \text{ Εμβαδ. του } \triangle P_1P_2Q$

Συμπέρασμα: $\text{Εμβαδ.}(\triangle P_1P_2P_3) = \frac{1}{2} \|\vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3}\|$

$$\vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right)$$

$$\text{Εμβαδ.}(\triangle P_1P_2P_3) = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}}^2}$$

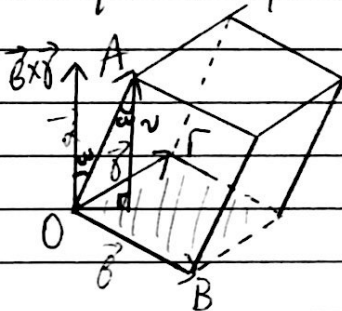
! Μέγεθος γινόμενου διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^3$!

ΟΡΙΣΜΟΣ Καλούμε μέγεθος γινόμενου των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ τον αριθμό:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle$$

Γεωμετρική ερμηνεία του μέγους γινόμενου

Θεωρία διανυσμάτων: $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$, $\vec{OA} = \vec{a}$



$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \|\vec{a}\| \|\vec{b} \times \vec{c}\| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c})$$

$$= \|\vec{b} \times \vec{c}\| \|\vec{a}\| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}) = \|\vec{b} \times \vec{c}\| v$$

Ο γινος του παραλλ. πημ. = $\|\vec{b} \times \vec{c}\| v$

! Συμπέρασμα: $|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = \text{όγκος παρ/δου με άκρες } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

ΠΡΟΠΟΙΣΜΑ Τα διανυσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ είναι συνεπίκετα (ή κο-επίκετα Γ.Ε.) $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$

Υπολογισμός μέγους γινόμενου

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1 \vec{x}_0 + a_2 \vec{y}_0 + a_3 \vec{z}_0$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = \dots$$

$$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) = \dots$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle$$



$$\vec{b} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ r_2 & r_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ r_1 & r_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{r}] = \alpha_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ r_2 & r_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ r_1 & r_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ Αν $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$

$$\text{τότε } [\vec{a}, \vec{b}, \vec{r}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}$$

- Ποιότητα :
- (i) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{r}$ συνεπίεδα $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}, \vec{r}] = 0$
 - (ii) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{r}$ είναι Γ.Α. $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}, \vec{r}] \neq 0$
 - (iii) $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{r}\}$ δεξιοστροφικά βάση $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}, \vec{r}] > 0$

Ιδιότητες μεταξύ γινόμενων

(i) $[\lambda \vec{a}, \vec{b}, \vec{r}] = \lambda [\vec{a}, \vec{b}, \vec{r}]$

(ii) $[\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{r}] = [\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{r}] + [\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{r}]$

(iii) $[\vec{a}, \vec{r}, \vec{b}] = -[\vec{a}, \vec{b}, \vec{r}] \quad ([\vec{a}, \vec{a}, \vec{r}] = 0)$

(iv) $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{r}] = [\vec{b}, \vec{r}, \vec{a}] = [\vec{r}, \vec{a}, \vec{b}]$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{r} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{r} \times \vec{a} \rangle = \langle \vec{r}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle$$

ΠΡΟΤΑΣΗ Για τυχόν διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ τα ακόλουθα ισχύουν:

$$(i) (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a}$$

$$(ii) \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{c}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (i) Αν $\vec{a}, \vec{b}$ είναι Γ.Ε. τότε $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a}$

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a} &= \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \lambda \vec{a} - \langle \lambda \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{a} \\ &= (\lambda \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle) \vec{a} - (\lambda \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle) \vec{a} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

Αν όχι, τότε τα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι Γ.Α.

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &\perp \vec{c} \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &\perp \vec{a} \times \vec{b} \Rightarrow \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \end{aligned}$$

Αξιωματικά:

$$\begin{aligned} \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \rangle &= \langle \vec{e}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle \\ &= [\vec{e}, \vec{a}, \vec{b}] \\ &= [\vec{a}, \vec{b}, \vec{e}] = \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{e} \rangle \\ &= \langle \vec{a}, \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d}) \rangle \\ &= \langle \vec{a}, \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle \vec{c} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{d} \rangle \\ &= \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle \end{aligned}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \rangle = \begin{vmatrix} \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle & \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle \\ \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle \end{vmatrix}$$

Επαγωγή:

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle = \begin{vmatrix} \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle & \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \\ \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \end{vmatrix} (=)$$

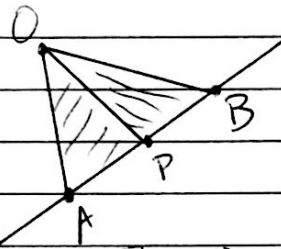
$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2$$

Άσκηση 3 επιπλέον

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Κατασκευάστε από το σημείο των επιπέδων A, B, P (μια αριστερή και μια δεξιά) τον αριθμό:

$$\lambda = (A, B, P) \Leftrightarrow \vec{AP} = \lambda \vec{PB}$$

$\Rightarrow A, B, P$ συνευθειακά σημεία



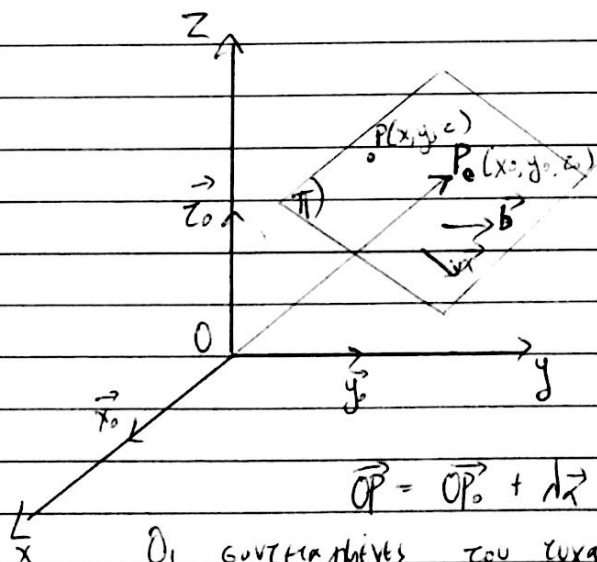
$$\left. \begin{array}{l} \vec{OP} = \vec{PB} + \vec{BO} \\ \vec{OP} = \vec{PA} + \vec{AO} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{OP} = \vec{PB} - \vec{OB} \\ \vec{OP} = -\vec{AP} - \vec{OA} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{OP} = \vec{PB} - \vec{OB} \\ \vec{OP} = -\lambda \vec{PB} - \vec{OA} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda \vec{OP} = \lambda \vec{PB} - \lambda \vec{OB} \\ \vec{OP} = -\lambda \vec{PB} - \vec{OA} \end{array} \right.$$

$$(\lambda + 1) \vec{OP} = -\lambda \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$\vec{OP} = \frac{-\vec{OA} + \lambda \vec{OB}}{\lambda + 1}$$

20/03/2018



Επίπεδο που διέρχεται από το σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και είναι παράλληλο προς τα γινόμενα των διανυσμάτων $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ είναι το σύνολο των σημείων P με διάνυσμα θέσης

$$\vec{OP} = \vec{OP}_0 + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Οι συντεταγμένες του τυχαίου σημείου του επιπέδου είναι

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\ y = y_0 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ z = z_0 + \lambda a_3 + \mu b_3 \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Παραμέτρους ελεύθερες του επιπέδου

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \alpha_1 + \mu \beta_1 = x - x_0 \\ \lambda \alpha_2 + \mu \beta_2 = y - y_0 \\ \lambda \alpha_3 + \mu \beta_3 = z - z_0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & x-x_0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & y-y_0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & z-z_0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

Αναλυτική Εξίσωση
του επιπέδου

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} (x-x_0) - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} (y-y_0) + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} (z-z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0}$$

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}, B = -\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}, \Gamma = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}, \Delta = -Ax_0 + By_0 - \Gamma z_0$$

$$(A, B, \Gamma) = \left(\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \vec{\alpha} \times \vec{\beta} \text{ εἰς ὅτι προέξω}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ Κάθε επίπεδο ἔχει αναλυτική εξίσωση τῆς μορφῆς
(*) $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$, ὅπου ἓνας τοῦλάχιστον ἀπὸ τοὺς
 A, B, Γ εἶναι $\neq 0$.

Αντίστροφα, τὸ σύνολο ὁρίσων μίας τέτοιας εξίσωσης εἶναι
επίπεδο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (Τοῦ ἀντιστροφῶς)

Ἐστω $P(x, y, z)$ ὡς (*)

Ἱσχύει ὅτι $(A, B, \Gamma) \neq (0, 0, 0)$. Υποθέτω χωρίς βλάβης τῆς
γενικότητας ὅτι $\Gamma \neq 0$ τότε (*) $\Leftrightarrow z = -\frac{A}{\Gamma}x - \frac{B}{\Gamma}y - \frac{\Delta}{\Gamma}$

$$(x, y, z) = \left(x, y, -\frac{A}{\Gamma}x - \frac{B}{\Gamma}y - \frac{\Delta}{\Gamma} \right) = \left(0, 0, -\frac{\Delta}{\Gamma} \right) + \left(x, 0, -\frac{A}{\Gamma}x \right) + \left(0, y, -\frac{B}{\Gamma}y \right) \rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + x \cdot 1 \\ y = 0 + y \cdot 1 \\ z = -\frac{A}{\Gamma} - \frac{A}{\Gamma}x - \frac{B}{\Gamma}y \end{cases}$$

Αυτές είναι οι παραμετρικές
εξισώσεις του επιπέδου που διέρχεται
από το $P_0(0, 0, -\frac{A}{\Gamma})$ και είναι

παράλληλο προς τα $\vec{a} = (1, 0, -\frac{A}{\Gamma})$

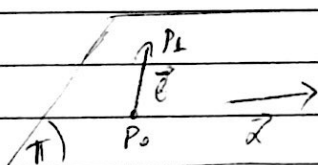
και $\vec{b} = (0, 1, -\frac{B}{\Gamma})$ τα οποία είναι Γ.Α. αφού

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ 1 & 0 & -\frac{A}{\Gamma} \\ 0 & 1 & -\frac{B}{\Gamma} \end{vmatrix} = \left(+\frac{A}{\Gamma}, -\frac{B}{\Gamma}, 1 \right) \neq \vec{0}$$

ΣΣΣ

Ένα επίπεδο καθορίζεται:

- (i) Από ένα σημείο του και 2 Γ.Α. διαδοχικά παράλληλα προς αυτό
- (ii) Από δύο σημεία του $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ και ένα διάνυσμα $\vec{a} \neq \vec{0}$ παράλληλο προς το επίπεδο αλλά γραμ. ανεξ. από P_0P_1 .



Η περίπτωση αυτή ανάγεται στην (i) λαμβάνοντας το επίπεδο που διέρχεται από το P_0 και είναι παράλ. προς τα Γ.Α. $\vec{a}, \vec{b} = \vec{P_0P_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$
 $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

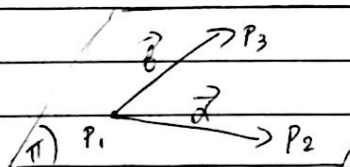
Παραμετρικές εξισώσεις

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda \alpha_1 + \mu (x_1 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda \alpha_2 + \mu (y_1 - y_0) \\ z = z_0 + \lambda \alpha_3 + \mu (z_1 - z_0) \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Αναλυτικές εξισώσεις:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

(iii) Από τρία μη συνευθειακά σημεία $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=1,2,3$.



Το επίπεδο καθορίζεται από το σημείο P_1 και τα Γ.Α. διανύσματα $\vec{a} = \vec{P_1P_2}$, $\vec{b} = \vec{P_1P_3}$

$$\vec{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\vec{b} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

Παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) + \mu(x_3 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) + \mu(y_3 - y_1) \\ z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1) + \mu(z_3 - z_1) \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Αναλυτική εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθούν οι παραμετρικές και αναλυτικές εξισώσεις του επιπέδου π το οποίο διέρχεται από το σημείο $P_0(1, -1, 2)$ και είναι παράλληλο προς τα Γ.Α. διανύσματα $\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (1, 2, 3)$.

Λύση:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (2, -4, 2) \neq \vec{0} \rightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ Γ.Α.}$$

Παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 1 \\ y = -1 + \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 2 \\ z = 2 + \lambda(-1) + \mu \cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -1 + 2\mu \\ z = 2 - \lambda + 3\mu \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Αναλυτική εξίσωση:

$$\begin{cases} x + z = 3 + 4\mu \\ 2\mu = y + 1 \end{cases}$$

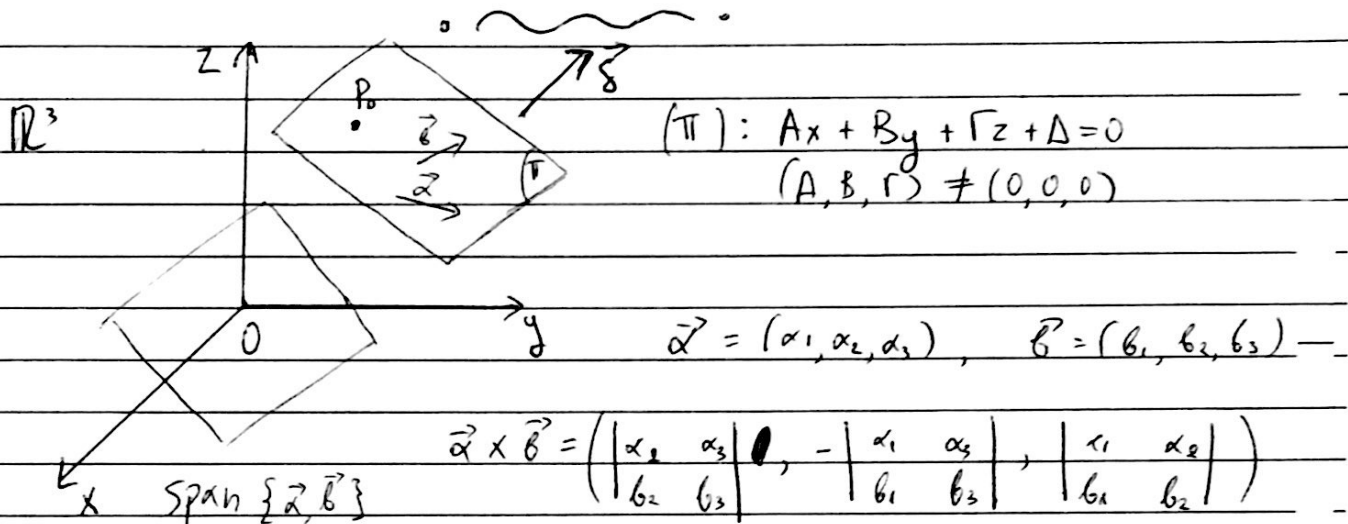
$$x + z = 3 + 2(y + 1)$$

$$\Leftrightarrow x - 2y + z - 5 = 0$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 4y + 2z - 10 = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x-2y+z-5=0$$



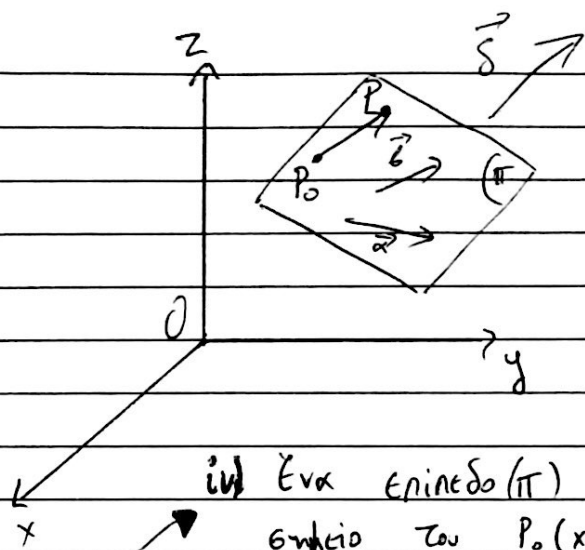
Παρατήρηση Το σημείο $O(0,0,0)$ ανήκει στο επίπεδο $(\pi): Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$
 $\Leftrightarrow \Delta = 0$

ΟΡΙΣΜΟΣ Το διάνυσμα $\vec{\delta} \neq \vec{0}$ καλείται νόρμα στο επίπεδο (π) αν και μόνο αν είναι κάθετο στα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ $\Leftrightarrow \langle \vec{\delta}, \vec{\alpha} \rangle = 0 = \langle \vec{\delta}, \vec{\beta} \rangle$

- Παρατήρηση
- Προφανώς το διάνυσμα $\vec{\alpha} \times \vec{\beta}$ είναι κάθετο στο (π) .
 - Το $\vec{\delta}$ είναι κάθετο σε κάθε διάνυσμα $k\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$ του (π) αφού $\langle \vec{\delta}, k\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} \rangle = k\langle \vec{\delta}, \vec{\alpha} \rangle + \mu\langle \vec{\delta}, \vec{\beta} \rangle = 0$
 - Κάθε διάνυσμα κάθετο στο (π) είναι της μορφής $\lambda \vec{\alpha} \times \vec{\beta}$, $\lambda \neq 0$

ΠΡΟΤΑΣΗ Εάν $(\pi): Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0, (A, B, \Gamma) \neq (0, 0, 0)$
 Τότε το διάνυσμα $\vec{n} = (A, B, \Gamma)$ είναι νόρμα στο (π)

$\hookrightarrow$



Έστω $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και $P(x, y, z) \in (\pi)$

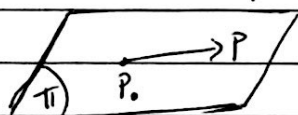
$$\Leftrightarrow \begin{cases} Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0 \\ Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0 + \Delta = 0 \end{cases} \quad (-)$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + \Gamma(z - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle \vec{n}, (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle \vec{n}, \vec{P_0P} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \perp (\pi)$$

iv) Ένα επίπεδο (π) καθορίζεται πλήρως αν γνωρίζω ένα σημείο του $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και ένα $\vec{n} = (A, B, \Gamma) \perp (\pi)$
 $\vec{n} = (A, B, \Gamma)$



$P_0(x_0, y_0, z_0)$

$P(x, y, z) \in (\pi)$

$$\vec{n} \perp (\pi) \Leftrightarrow \langle \vec{P_0P}, \vec{n} \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\vec{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0), \vec{n} = (A, B, \Gamma)$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Η αναλυτική εξίσωση του επιπέδου (π) που διέρχεται από το $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και είναι κάθετο στο $\vec{n} = (A, B, \Gamma) \neq (0, 0, 0)$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + \Gamma(z - z_0) = 0$$

Π.χ) $(\pi) : 2x - y + z = 1$

$$\vec{n} = (2, -1, 1) \perp (\pi)$$

ii) Να βρεθεί η αναλυτική εξίσωση του επιπέδου (π) που διέρχεται από το σημείο $P_0(2, 3, -1)$ και είναι κάθετο στο $\vec{n} = (2, 0, -1)$

Απάντηση:

$$2(x - 2) + 0(y - 3) - (z + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x - z - 5 = 0$$

→ Σχέσεις θέσας 2 επιπέδων ←

Πρόβλημα: Δίνονται τα επίπεδα

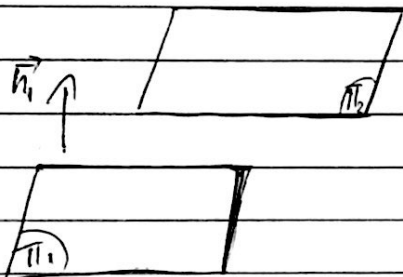
$$(\pi_1): A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1 = 0$$

$$(\pi_2): A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2 = 0$$

Ποια είναι η σχέση τους;

Απάντηση: $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, \Gamma_1) \perp (\pi_1)$

$$\vec{n}_2 = (A_2, B_2, \Gamma_2) \perp (\pi_2)$$



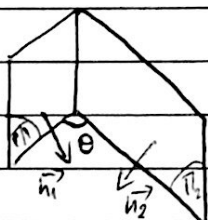
Υπολογισμός το

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} |A_2 & A_3| & -|A_1 & A_3| & |A_1 & A_2| \\ B_2 & B_3| & B_1 & B_3| & B_1 & B_2| \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$$

- Αν $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0}$
 - ταυτίζονται $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$
 - παράλληλα $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \neq \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$

- Αν $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq \vec{0}$



Τα επίπεδα τέμνονται σε άπειρα σημεία

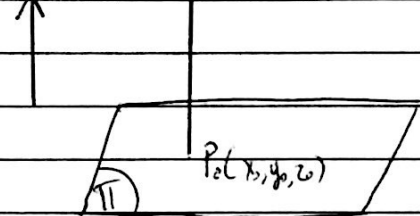
Η γωνία θ των $(\pi_1), (\pi_2)$ είναι

$$\theta = \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2), \quad \cos \theta = \frac{|\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle|}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|}$$

Πρόβλημα: Δίνεται επίπεδο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και επίπεδο $(\pi) Ax + By + Cz + D = 0$
Να βρεθεί η απόσταση

$\vec{n} = (A, B, C)$ $P_1(x_1, y_1, z_1)$

$d(P_1, (\pi))$ του P_1 από το
επίπεδο (π) .



Λύση: Θέλουμε ευθεία $P_0 P_1 \perp (\pi)$ του
τέμνει το (π) στο σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$

Τότε $\vec{P_0 P_1} = \lambda \vec{n}, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$d(P_1, (\pi)) = \|\vec{P_0 P_1}\| = \|\lambda \vec{n}\| = |\lambda| \|\vec{n}\|$$

$$\Leftrightarrow d(P_1, (\pi)) = |\lambda| \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$\vec{P_0 P_1} = \lambda \vec{n} \Leftrightarrow (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) = \lambda (A, B, C)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_0 + \lambda A \\ y_1 = y_0 + \lambda B \\ z_1 = z_0 + \lambda C \end{cases}$$

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = A(x_0 + \lambda A) + B(y_0 + \lambda B) + C(z_0 + \lambda C) + D$$

$$= Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + \lambda(A^2 + B^2 + C^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$\bullet P_1 \in \pi^+ \Leftrightarrow \lambda > 0 \Leftrightarrow Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D > 0$$

$$\bullet P_1 \in \pi^- \Leftrightarrow \lambda < 0 \Leftrightarrow Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D < 0$$

$$\text{Τέλος για } d(P_1, (\pi)) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\underline{\text{Απάντηση}} \quad d(P_1, (\pi)) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Τέλος μαθημάτων

Des zu Geraden für

~~12/03/2018~~

* Ax Geraden für Ox sind $P_1(-\frac{\Delta}{A}, 0, 0)$

-||- Oy -||- $P_2(0, -\frac{\Delta}{B}, 0)$

-||- Oz -||- $P_3(0, 0, -\frac{\Delta}{\Gamma})$

$$Ax + By + \Gamma z = -\Delta \Leftrightarrow \frac{x}{-\frac{\Delta}{A}} + \frac{y}{-\frac{\Delta}{B}} + \frac{z}{-\frac{\Delta}{\Gamma}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{x}{\frac{\Delta}{A}} + \frac{y}{\frac{\Delta}{B}} + \frac{z}{\frac{\Delta}{\Gamma}} = 1 \right|$$

• $\Gamma = 0, A, B \neq 0 \quad Ax + By + \Delta = 0$

Zufrieden für $Ox \quad P_1(-\frac{\Delta}{A}, 0, 0)$

>> $Oy \quad P_2(0, -\frac{\Delta}{B}, 0)$

Zufrieden für Oz :

$$Oz + \Delta = 0$$

$$A \vee \Delta \neq 0, \pi \cap Oz = \emptyset$$

$$A \vee \Delta = 0,$$

• $B = \Gamma = 0, A \neq 0$

$$Ax + \Delta = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\Delta}{A}$$

~~Gerade~~ ~~Gerade~~

22/03/2018

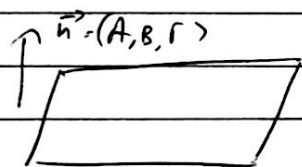
Σε ένα φύλλο:

• Τετάρτη, 18:00 - 21:00 Αφρ. 3

• Πέμπτη, 18:00 - 20:00 >>

• ~ ~ ~

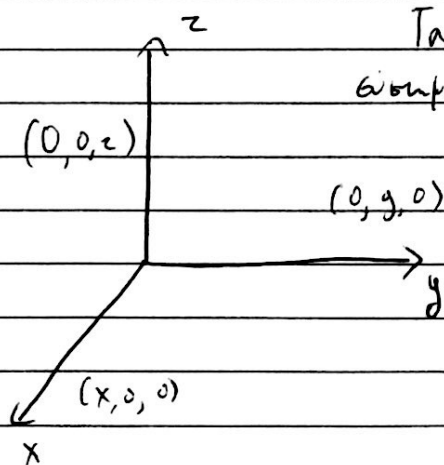
$$(\Pi) : Ax + By + \Gamma z + A = 0, (A, B, \Gamma) \neq (0, 0, 0)$$



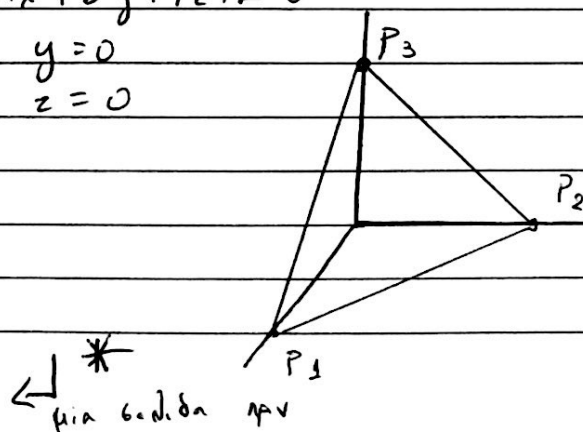
Ειδίκες περιπτώσεις της αναλύσεως εξισώσεων του επιπέδου

• $\Delta = 0 \Leftrightarrow O(0, 0, 0) \in (\Pi)$

• $AB\Gamma \neq 0$



Τα επίπεδα τομής τα βρίσκουμε διορίζοντας το
συστήμα
$$\begin{cases} Ax + By + \Gamma z + A = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$



Σ επιφ. $\mu \in O_x : P_0 \left(-\frac{\Delta}{A}, 0, 0 \right)$

" " $O_y : 0_y + \Delta = 0$

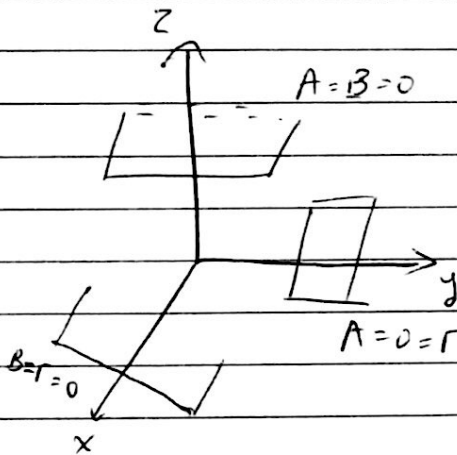
$\Delta \neq 0 \Rightarrow (n) \parallel O_y$

$\Delta = 0 \Rightarrow 0_y \leq (\pi)$

Σ επιφ. $\mu \in O_z : 0_z + \Delta = 0$

$\Delta \neq 0 \Rightarrow (\pi) \parallel O_z$

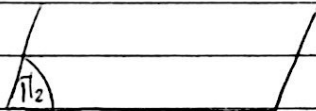
$\Delta = 0 \Rightarrow 0_z \leq (\pi)$



$(\pi_1) : A_x + B_y + \Gamma_z + \Delta_1 = 0 \quad (A, B, \Gamma) \neq (0, 0, 0)$

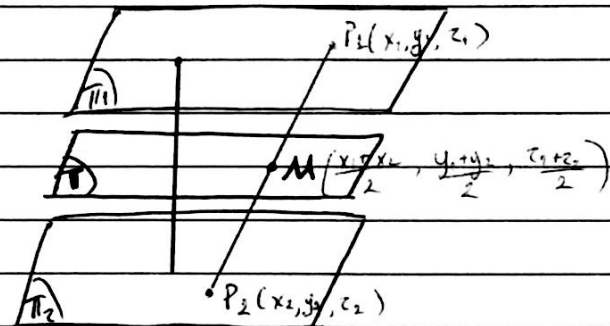


Κάθε επίπεδο $(\pi_2) \parallel (\pi_1)$ έχει
είδηση ως προς:



$(\pi_2) : A_x + B_y + \Gamma_z + \Delta_2 = 0$

Απόδειξη παραλληλίου επιπέδων



Πρόβλημα: Να βρεθεί επίπεδο (π) το οποίο είναι παράλληλο προς τα $(\pi_1) \parallel (\pi_2)$ και να έχει από αυτά.
(Το επίπεδο (π) कहलैतल μεσοπαράλληλο επίπεδο.)

Απάντηση: Άρα $(\pi) \parallel (\pi_1)$ έχει εξίσωση της μορφής
 $(\pi): Ax + By + Cz + D = 0$
πρέπει να βρω το D .

Θέλω τυχαία σημεία $P_1(x_1, y_1, z_1) \in (\pi_1)$ και $P_2(x_2, y_2, z_2) \in (\pi_2)$
Τότε το μέσο $M(x_m, y_m, z_m)$ του ευθ. τμήματος P_1P_2
ανήκει στο επίπεδο (π) .

$$\overrightarrow{P_1M} = \overrightarrow{MP_2} \Leftrightarrow (x_m - x_1, y_m - y_1, z_m - z_1) = (x_2 - x_m, y_2 - y_m, z_2 - z_m)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_m - x_1 = x_2 - x_m \\ y_m - y_1 = y_2 - y_m \\ z_m - z_1 = z_2 - z_m \end{cases}$$

Παρατήρηση: Οι συντεταγμένες του μέσου $M(x_m, y_m, z_m)$ ενός ευθ. τμήματος με άκρα $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ είναι
 $x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $z_m = \frac{z_1 + z_2}{2}$

LD

$$\text{Άρα } \begin{cases} Ax_1 + By_1 + \Gamma z_1 + \Delta_1 = 0 \\ Ax_2 + By_2 + \Gamma z_2 + \Delta_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{+} A \frac{x_1+x_2}{2} + B \frac{y_1+y_2}{2} + \Gamma \frac{z_1+z_2}{2} + \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} = 0$$

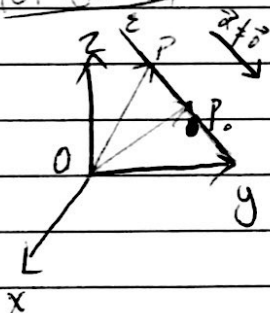
$$A \frac{x_1+x_2}{2} + B \frac{y_1+y_2}{2} + \Gamma \frac{z_1+z_2}{2} + \Delta = 0$$

$$\text{Οπότε } \Delta = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}$$

• ~~~~~ •

Ευθείες στο χώρο $\mathbb{R}^3$

ΟΡΙΣΜΟΣ



Καμία ευθεία που διέρχεται από το σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$ το σύνολο των σημείων $P(x, y, z)$ με διάνυσμα θέσης

$$\vec{OP} = \vec{OP_0} + t \vec{a}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{παράμετρος}$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a_1, a_2, a_3)$$

• Παράμετροι εξισώσεων της ευθείας

$$\begin{cases} x = x_0 + t a_1 \\ y = y_0 + t a_2 \\ z = z_0 + t a_3 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

• Συμπεριφορά εξισώσεων της ευθείας

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

Π.Χ Δίνεται η ευθεία

$$(\varepsilon): \frac{x+1}{2} = \frac{y}{0} = -(z+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - (-1)}{2} = \frac{y - 0}{0} = \frac{z - (-1)}{-1}$$

Η (ε) διέρχεται από το σημείο $P_0(-1, 0, -1)$
και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα
 $\vec{a} = (2, 0, -1) \neq \vec{0}$

$$\bullet \begin{cases} \frac{x-x_0}{\alpha_1} = \frac{y-y_0}{\alpha_2} \\ \frac{x-x_0}{\alpha_1} = \frac{z-z_0}{\alpha_3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

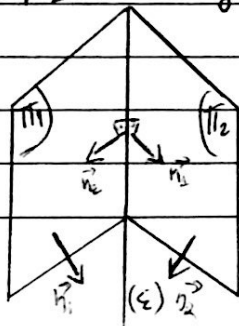
$$\begin{cases} \alpha_2(x-x_0) = \alpha_1(y-y_0) \\ \alpha_3(x-x_0) = \alpha_1(z-z_0) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_2 x - \alpha_1 y - \alpha_2 x_0 + \alpha_1 y_0 = 0 \\ \alpha_3 x - \alpha_1 z - \alpha_3 x_0 + \alpha_1 z_0 = 0 \end{cases}$$

Εδώ $\alpha_1 \neq 0$

• Αναζητούμε τις εξισώσεις

$$(\varepsilon) \begin{cases} A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0 & (\pi_1) \\ A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0 & (\pi_2) \end{cases}$$

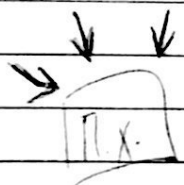


$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, \Gamma_1) \perp (\pi_1)$$

$$\vec{n}_2 = (A_2, B_2, \Gamma_2) \perp (\pi_2)$$

$(\pi_1), (\pi_2)$ τέμνουν κατά finite γωνίας $\Leftrightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq \vec{0}$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_1 \perp (\epsilon) \\ \vec{n}_2 \perp (\epsilon) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \parallel (\epsilon)}$$



Δίνεται η ευθεία

$$(\epsilon) \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ 3x - y_0 + 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

Να βρεθούν οι συστροφικές εξισώσεις.

Θα βρούμε ένα σημείο P_0 της ευθείας. Αν πάρουμε σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ της ευθείας με $z_0 = 0$. (Παρακάτω)

$$\text{Τότε} \begin{cases} 2x_0 - 3y_0 = 2 \\ 3x_0 - y_0 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = -2 \end{cases}$$

$$\vec{n}_1 = (2, -3, 1) \perp (\pi_1)$$

$$\vec{n}_2 = (3, -1, 2) \perp (\pi_2)$$

Αρα $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \parallel (\epsilon)$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (-5, -1, 7) \neq \vec{0}$$

$$\text{Συστροφικές εξισώσεις: } \frac{x+2}{5} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-0}{-7}$$

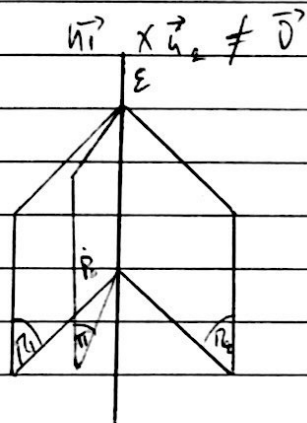
Πρόβλημα : Δίνεται ευθεία

$$(E) : \begin{cases} (\pi_1) & A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1 = 0 \\ (\pi_2) & A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2 = 0 \end{cases}, (A_1, B_1, \Gamma_1) \neq (0, 0, 0), (A_2, B_2, \Gamma_2) \neq (0, 0, 0)$$

Να βρεθούν τα επίπεδα που περιέχουν την (E)

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, \Gamma_1) \perp (\pi_1)$$

$$\vec{n}_2 = (A_2, B_2, \Gamma_2) \perp (\pi_2)$$



Θεωρούμε την $E \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\lambda(A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1) + \mu(A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2) = 0 \quad (*)$$

$$\text{όπου } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \mu \neq 0 \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

Προφανώς τα επίπεδα της (E) είναι $\lambda\pi_1 + \mu\pi_2$ (*)

$$(*) \Rightarrow (\lambda A_1 + \mu A_2)x + (\lambda B_1 + \mu B_2)y + (\lambda \Gamma_1 + \mu \Gamma_2)z + \lambda \Delta_1 + \mu \Delta_2 = 0$$

Αντι λαμβάνεται επίπεδο μόνο αν

$$(\lambda A_1 + \mu A_2, \lambda B_1 + \mu B_2, \lambda \Gamma_1 + \mu \Gamma_2) \neq (0, 0, 0)$$

$$\text{Έστω } (\lambda A_1 + \mu A_2, \lambda B_1 + \mu B_2, \lambda \Gamma_1 + \mu \Gamma_2) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda A_1, \lambda B_1, \lambda \Gamma_1) + (\mu A_2, \mu B_2, \mu \Gamma_2) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda \vec{n}_1 + \mu \vec{n}_2 = \vec{0}$$

$$(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

Άτοπο

Αντίστροφα, έστω επίπεδο (π) το οποίο περιέχει την (E)

Θαυρίσουμε σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0) \in (\pi)$ και $P_0 \notin (E)$

$$P_0 \notin (E) \Leftrightarrow \lambda A_1 x_0 + B_1 y_0 + \Gamma_1 z_0 + \Delta_1 \neq 0 \quad \text{ή}$$

$$\mu A_2 x_0 + B_2 y_0 + \Gamma_2 z_0 + \Delta_2 \neq 0$$

Θεωρία το επίπεδο, με εξίσωση

$$-\mu(A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1) + \lambda(A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2) = 0$$

$$-\mu(A_1x_0 + B_1y_0 + \Gamma_1z_0 + \Delta_1) + \lambda(A_2x_0 + B_2y_0 + \Gamma_2z_0 + \Delta_2) = 0$$

Απόδειξη: Κάθε επίπεδο που περιέχει την (ε) έχει εξίσωση της μορφής:

$$\lambda(A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1) + \mu(A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2) = 0$$

για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$ με $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$

ΑΣΚΗΣΗ 11 Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που περιέχει την ευθεία (ε)

$$\begin{cases} 3x - 2y + 6z - 6 = 0 \\ x - y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

και το σημείο $(0, 0, 0)$

Λύση Το ζητούμενο επίπεδο έχει εξίσωση της μορφής

$$(*) \lambda(3x - 2y + 6z - 6) + \mu(x - y + z + 4) = 0, \mu \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

Πρέπει $-6\lambda + 4\mu = 0 \Leftrightarrow \boxed{\mu = \frac{3}{2}\lambda} \quad \lambda \neq 0$

$$(*) \Rightarrow \lambda(3x - 2y + 6z - 6) + \frac{3}{2}\lambda(x - y + z + 4) = 0$$

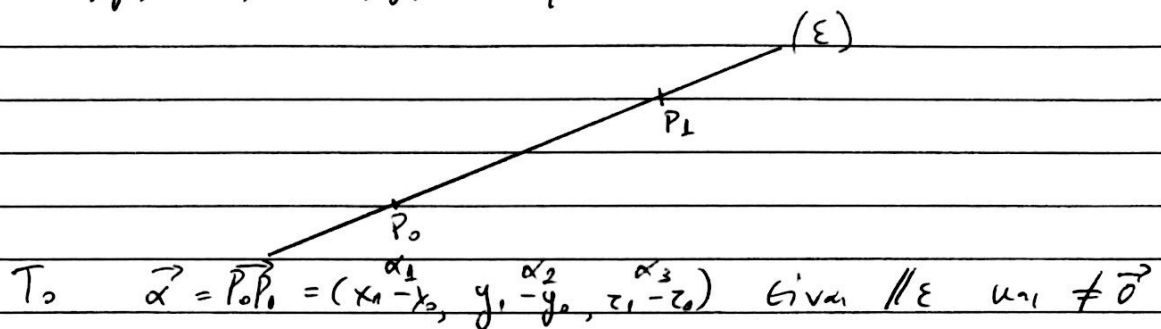
$$\Leftrightarrow 6x - 4y + 12z - 12 + 3x - 3y + 3z + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{9x - 7y + 15z = 0}$$

$\hookrightarrow$ τα επίπεδα που περιέχουν το $(0, 0, 0)$ έχουν σταθερά $\Delta = 0$



Μια ευθεία καθορίζεται όταν δοθούν ΔΥΟ σημεία u_1
 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ με $P_0 \neq P_1$



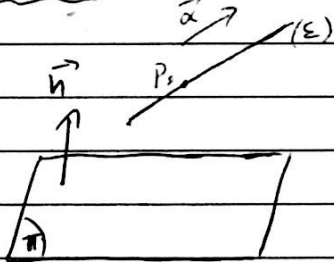
Σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου

Διότι ευθεία $(\varepsilon) \quad \frac{x-x_0}{\alpha_1} = \frac{y-y_0}{\alpha_2} = \frac{z-z_0}{\alpha_3} = t u_1$

επίπεδο $(\pi) \quad Ax + By + Cz + D = 0$

Ερωτήματα Πότες είναι οι σχετικές θέσεις;

Απάντηση $\vec{n} = (A, B, C) \perp (\pi)$, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \parallel (\varepsilon)$



• $\vec{n} \times \vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha}, \vec{n}$ γρ. εξαρτημένα
 $\Leftrightarrow (\varepsilon) \perp (\pi)$

• $\vec{n} \times \vec{\alpha} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha}, \vec{n}$ γρ. ανεξαρτήτως
 $(i) \langle \vec{n}, \vec{\alpha} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{n}(\varepsilon) \parallel (\pi)$

$(P_0 \notin (\pi)) \quad \vec{n}(\varepsilon) \subseteq (\pi)$
 $(P_0 \in (\pi))$

$(ii) \langle \vec{n}, \vec{\alpha} \rangle \neq 0$. Αναζητούμε τα σημεία κοινής της (ε) και του (π) λύοντας το σύστημα

$$\begin{cases} x = x_0 + t \alpha_1 \\ y = y_0 + t \alpha_2 \\ z = z_0 + t \alpha_3 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

↳

$$A(x_0 + t\alpha_1) + B(y_0 + t\alpha_2) + \Gamma(z_0 + t\alpha_3) + \Delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0 + \Delta + t(A\alpha_1 + B\alpha_2 + \Gamma\alpha_3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0 + \Delta + t \langle \vec{n}, \vec{\alpha} \rangle = 0$$

Novi slučaj: $t = - \frac{Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0 + \Delta}{\langle \vec{n}, \vec{\alpha} \rangle}$

Intersekcija dviju ravnina

Divatna od ravnina

$$(\varepsilon_1): \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3} = t$$

$$(\varepsilon_2): \frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{b_3} = s$$

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$P_1(x_1, y_1, z_1)$$

$$P_2(x_2, y_2, z_2)$$

ε_1

ε_2

$$(i) \vec{\alpha} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha}, \vec{b} \text{ su paralelni.}$$

$$(\varepsilon_1) = (\varepsilon_2)$$

n

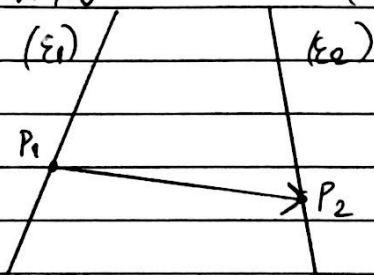
P₁

P₂

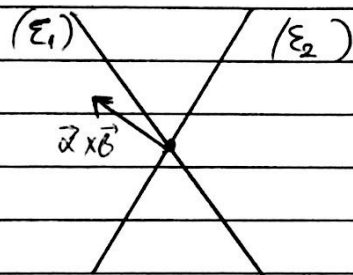
Novi slučaj:
Ravnine su
paralelne i
ne se sijeku.

L₀

$$(ii) \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow (\epsilon_1) \neq (\epsilon_2)$$



αβήβατες



τερνώτες

Πως το ελέγχω:

$(\epsilon_1), (\epsilon_2)$ συνεπίπδες $\Leftrightarrow \vec{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}$ ειναι συνεπίπδες

$$\Leftrightarrow [\vec{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}] = 0$$

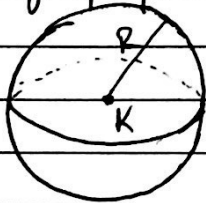
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

28/03/2018

Σφαιρα στο $\mathbb{R}^3$

ΟΡΙΣΜΟΣ Σφαιρα κέντρου K και ακτίνας R είναι ο

συνεπής σφαιρα των σημείων του χώρου που ικανοποιούν ως το K εάν $\vec{x}_k = (x, y, z)$ είναι το διάνυσμα θέσης του K τότε:



Διανυσματική εξίσωση

$$\| \vec{x} - \vec{x}_k \| = R \quad (1)$$

Κανονική εξίσωση

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = R^2 \quad (2)$$

LB

A) αναθεωρούμε την (2) $\Rightarrow$

$$x^2 + y^2 + z^2 + \underbrace{-2\alpha x}_A + \underbrace{-2\beta y}_B + \underbrace{-2\gamma z}_\Gamma + \underbrace{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R^2}_\Delta = 0$$

Μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση της σφαίρας και ως

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0} \quad (3)$$

H (3) ονομάζεται κανονική εξίσωση.

A) Σημειώστε τώρα το αντίστοιχο. Ανάλογα τι λαμβάνεται η (3) για τυχαία A, B, Γ, Δ .

ΠΡΟΤΑΣΗ Μπορούμε να εξισώσουμε

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$$

Τότε :

- (i) Εάν $A^2 + B^2 + \Gamma^2 - 4\Delta < 0$, η εξίσωση δεν έχει λύση
- (ii) Εάν $A^2 + B^2 + \Gamma^2 - 4\Delta = 0$, η λύση είναι εφελκυσ
- (iii) Εάν $A^2 + B^2 + \Gamma^2 - 4\Delta > 0$, η λύση είναι σφαίρα με κέντρο το $K(-A/2, -B/2, -\Gamma/2)$ και ακτίνα $R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2 - 4\Delta}}{2}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Γράφουμε ισοδύναμα την εξίσωση μας ως εξής:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + Ax + y^2 + By + z^2 + \Gamma z + \Delta \\ &= x^2 + 2\frac{A}{2}x + y^2 + 2\frac{B}{2}y + z^2 + 2\frac{\Gamma}{2}z + \Delta \\ &= \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{\Gamma}{2}\right)^2 - \frac{A^2}{4} - \frac{B^2}{4} - \frac{\Gamma^2}{4} + \Delta \end{aligned}$$

$$\text{Ισοδύναμα : } \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{\Gamma}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 + \Gamma^2 - 4\Delta}{4}$$

Τα συσχετισμένα (i), (ii) και (iii) είναι αληθή

Παρατήρηση: Πολλές φορές η εξίσωση της σφαίρας γράφεται και έτσι: $E(x^2 + y^2 + z^2) + Ax + By + Cz + D = 0$

Για $E=0$ και $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ έχουμε επίπεδο, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως σφαίρα με κέντρο το ∞ .

ΘΕΩΡΗΜΑ Δίνονται 4 σημεία $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3), P_4(x_4, y_4, z_4)$ στο $\mathbb{R}^3$, τα οποία δεν είναι συνεπίκεδρα. Τότε υπάρχει μία και μόνο σφαίρα η οποία διέρχεται από τα P_1, P_2, P_3, P_4 . Επιπλέον, η σφαίρα αυτή έχει εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αν αναζητούμε την οριζόντια θα πρέπει να εξίσωση τη μορφής:

$$E(x^2 + y^2 + z^2) + Ax + By + Cz + D = 0$$

Έχουμε ότι

$$E = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 & 0 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 & 0 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 & 0 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix}$$

$$= - \langle \vec{P_4 P_1}, \vec{P_4 P_2} \times \vec{P_4 P_3} \rangle \neq 0$$

Άρα $E \neq 0$, επομένως η εξίσωση μας λησιμονά σφαίρα.

αυτή είναι

5x5

Παρατήρηση: Πως βρίσκουμε μια αρχική λύση να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες των σημείων που διέρχεται από 4- επιφάνειες $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$, $P_4(x_4, y_4, z_4)$;

Η επιφάνεια που έχει εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$

Αρκεί να βρούμε τα A, B, C, D . Οπότε τα P_1, P_2, P_3, P_4 είναι 6- επιφάνειες

$$\text{Τις επιφάνειες} \Rightarrow Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = -x_1^2 - y_1^2 - z_1^2$$

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = -x_2^2 - y_2^2 - z_2^2$$

$$Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = -x_3^2 - y_3^2 - z_3^2$$

$$Ax_4 + By_4 + Cz_4 + D = -x_4^2 - y_4^2 - z_4^2$$

Παραδοχή: Να βρούμε (αν υπάρχει) επιφάνεια που διέρχεται από τα σημεία $P_1(1, 0, 0)$, $P_2(0, 1, 0)$, $P_3(0, 0, 1)$ και $P_4(1, 0, 1)$

Λύση: Από τα σημεία P_1, P_2, P_3 διέρχεται το επίπεδο

$$x + y + z = 1$$

Το P_4 δεν ανήκει στο επίπεδο των P_1, P_2, P_3 οπότε δεν υπάρχει τέτοια επιφάνεια.

Η επιφάνεια που διέρχεται έχει εξίσωση

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

Αρα,

$$\begin{cases} 1 + A + D = 0 \\ 1 + B + D = 0 \\ 1 + C + D = 0 \\ 2 + A + C + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 - D \\ B = -1 - D \\ C = -1 - D \\ 2 + (-1 - D) + (-1 - D) + D = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = -1 \\ C = -1 \\ D = 0 \end{cases}$$

Σχέσεις θέσης σφαίρας - επιπέδου

Δίνεται σφαίρα (Σ) με κέντρο το $K(x, y, z)$ και ακτίνα R , ενώ το επίπεδο $(\Pi) : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$ και το επίπεδο Π

$$(\Pi) : Ax + By + \Gamma z + D = 0$$

Η απόσταση του κέντρου K από το επίπεδο Π

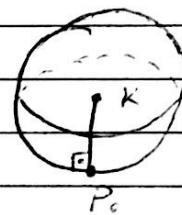
$$d(K, \Pi) = \frac{|Ax + By + \Gamma z + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}$$

□ Εάν $d(K, \Pi) \geq R$, η σφαίρα και το επίπεδο δεν έχουν κοινά σημεία

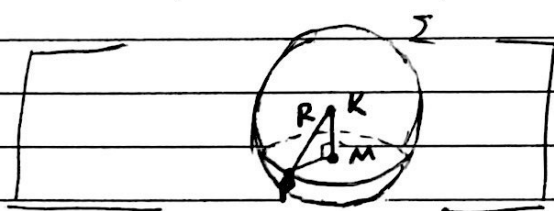


□ Εάν $d(K, \Pi) = R$, τότε η τομή $\Sigma \cap \Pi = \{ \text{σημείο } P_0 \}$.

Σε αυτή την περίπτωση το Π εφαπτεται της Σ και το ονομάζουμε εφαπτόμενο επίπεδο στο P_0 . Επίσης το $\overrightarrow{KP_0}$ είναι κάθετο στο Π .



□ Εάν $d(K, \Pi) < R$, τότε η τομή είναι μια κυκλική. Θα δείξουμε ότι η κυκλική αυτή είναι κέντρο στο Π .



Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο σημείο $P \in \Sigma \cap \Pi$. Ας συμβολίσουμε με M την ορθή προβολή του K στο Π . Τότε το τρίγωνο KMP είναι ορθογώνιο. Ας το θεωρήσουμε ομοίως :

$$\begin{aligned} (d(P, M))^2 &= (d(P, K))^2 - (d(K, M))^2 \\ &= R^2 - (d(K, M))^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow d(P, M) = \sqrt{R^2 - (d(K, M))^2}$ δεν εξαρτάται από το P . Άρα η απόσταση του P από το M είναι σταθερή. Συνεπώς σε αυτή την περίπτωση $\Sigma \cap \Pi = \text{κύκλος}$

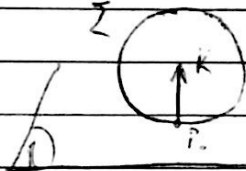
Εξίσωση εφαπτομένης επίπεδου στο σφαίρα

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε σφαίρα (Σ) με εξίσωση

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$$

Θέλουμε να βρούμε το εφαπτόμενο επίπεδο στο $P_0 \in \Sigma$.

Το διάνυσμα $\vec{KP_0}$ είναι κάθετο στο επίπεδο Π που διέρχεται. Επειδή $P_0 \in \Pi$ η εξίσωση του Π θα είναι :



$$\begin{aligned} 0 &= (x-x_0)(x_0-\alpha) + (y-y_0)(y_0-\beta) + (z-z_0)(z_0-\gamma) \\ &= (x-\alpha + \alpha-x_0)(x_0-\alpha) + (y-\beta + \beta-y_0)(y_0-\beta) + \\ &\quad + (z-\gamma + \gamma-z_0)(z_0-\gamma) \\ &= (x-\alpha)(x_0-\alpha) + (y-\beta)(y_0-\beta) + (z-\gamma)(z_0-\gamma) \\ &\quad - (x_0-\alpha)^2 - (y_0-\beta)^2 - (z_0-\gamma)^2 \end{aligned}$$

Αρα λαμβάνουμε

$$(x-\alpha)(x_0-\alpha) + (y-\beta)(y_0-\beta) + (z-\gamma)(z_0-\gamma) = R^2$$

Έχουμε αποδείξει το εξής

ΘΕΩΡΗΜΑ : Εάν Σ είναι σφαίρα με εξίσωση

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$$

τότε το εφαπτόμενο επίπεδο στο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ έχει εξίσωση

$$(x-\alpha)(x_0-\alpha) + (y-\beta)(y_0-\beta) + (z-\gamma)(z_0-\gamma) = R^2$$

Παρατήρηση : Ας υποθέσουμε ότι η σφαίρα μας δίνεται ως εξής :

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

Τότε γράφουμε ισοδύναμα την εξίσωση ως

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{C}{2}\right)^2 = R^2 = \frac{A^2 + B^2 + C^2 - 4D}{4}$$

Επομένως το εφαπτόμενο επίπεδο στο $P_0 \in \Sigma$ είναι

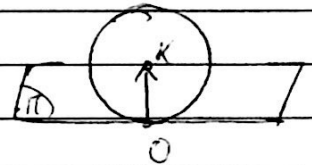
$$\begin{aligned} \left(x + \frac{A}{2}\right) \left(x_0 + \frac{A}{2}\right) + \left(y + \frac{B}{2}\right) \left(y_0 + \frac{B}{2}\right) + \left(z + \frac{C}{2}\right) \left(z_0 + \frac{C}{2}\right) = \\ \frac{A^2 + B^2 + C^2 - 4D}{4} \end{aligned}$$

Μετα από αυτές βρίσκουμε

$$x x_0 + y y_0 + z z_0 + \frac{A}{2} (x + x_0) + \frac{B}{2} (y + y_0) + \frac{\Gamma}{2} (z + z_0) + \Delta = 0$$

Παράδειγμα: Δίνεται η σφαίρα $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 8y - 6z = 0$
Να βρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο στο $O(0,0,0) \in \Sigma$

Λύση: $0 = x^2 + 4x + y^2 + 8y + z^2 - 6z$
 $4 + 16 + 9 = (x+2)^2 + (y+4)^2 + (z-3)^2$
 $\Rightarrow (x+2)^2 + (y+4)^2 + (z-3)^2 = 29$



Το κέντρο είναι το σημείο $K(-2, -4, 3)$

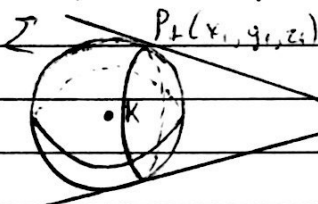
Το διάνυσμα $\vec{OK} = (-2, -4, 3)$ είναι κάθετο στο επίπεδο που ζητείται. Άρα

$$0 = \langle \vec{OK}, \vec{OX} \rangle = \langle (-2, -4, 3), (x, y, z) \rangle$$

$$\Rightarrow \underline{-2x - 4y + 3z = 0} \quad (\pi)$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Δίνεται σφαίρα $(\Sigma): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$
 και σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ εκτός σφαίρας. Αν το P_0
 υπάρχουν άμεσα επίπεδα προς την σφαίρα. Τι σχήμα έχουν τα
 επίπεδα επαφής; Θα αποδείξετε ότι τα σχήμα είναι κύκλοι.



Ας υποθέσουμε ότι $P_0(x_0, y_0, z_0)$ το
 σημείο επαφής προς επίπεδο π που
 διέρχεται από το $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Η εξίσωση
 του π θα είναι:

$$(x-a)(x_0-a) + (y-b)(y_0-b) + (z-\gamma)(z_0-\gamma) = R^2$$

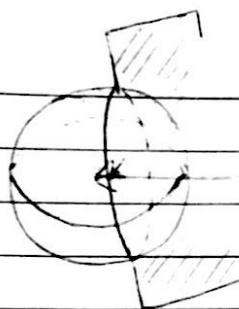
Όμως το π διέρχεται και από το P_0 .

Συνεπώς,

$$(x_0-a)(x_0-a) + (y_0-b)(y_0-b) + (z_0-\gamma)(z_0-\gamma) = R^2$$

Αυτή είναι η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου που διέρχεται
 από P_0 και P_0 . Επομένως το P_0 βρίσκεται σε επίπεδο με
 εξίσωση: $(x_0-a)(x-a) + (y_0-b)(y-b) + (z_0-\gamma)(z-\gamma) = R^2 (*)$

↳



Ποδισ ενιπεδο

Ενοπιον ιστι τα επι-τιν εφης της Σ
με το ενιπεδο (*) περιγραιν
κονο.

ΟΡΙΣΜΟΣ Δινεται σφαيرا Σ με εξισωσις

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$$

και επιση P_0 εντος της Σ . Το επιση P_0

$$(x_0-\alpha)(x-\alpha) + (y_0-\beta)(y-\beta) + (z_0-\gamma)(z-\gamma) = R^2$$

λεγειται ποδισ ενιπεδο των P_0 ως προς την Σ .

Δεκτη σφαिरων

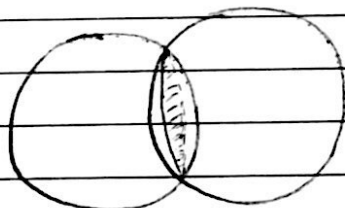
Θεωρουσθε δυο σφαιρες Σ_1, Σ_2 με εξισωσεις

$$\Sigma_1: S_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1 = 0$$

$$\Sigma_2: S_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2 = 0$$

Ας υποθεσωμε οτι Σ_1 και Σ_2 τεμνονται και δεν εφαιδονται.

Θεωρουσθε να βρωθε ολες τες σφαιρες που διερχονται απο την
τομη των.



Για αυτω τον λογον θεωρουσθε την
εξισωσιν

$$0 = \lambda S_1(x, y, z) + \mu S_2(x, y, z)$$

που ισοδυναμει γραπτως ως εξης

$$(A + \lambda A_1 + \mu A_2)x + (\lambda B_1 + \mu B_2)y + (\lambda \Gamma_1 + \mu \Gamma_2)z + \lambda \Delta_1 + \mu \Delta_2 = 0$$

Εαν $\lambda \neq -\mu$, τοτε η τελευταια εξισωσις παριστανει

σφαिरα και η κονη επιση της Σ_1, Σ_2 ανηκει εν εξισωσι.

Η ολοκληρωσις των παρχων σφαिरων λεγειται δευτη σφαिरων.

Παράδειγμα: Δίνονται οι σφαίρες

$$\Sigma_1: x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z - 40 = 0$$

$$\Sigma_2: x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 20 = 0$$

Θέλουμε να βρούμε μια σφαίρα η οποία διέρχεται από την τομή των Σ_1 και Σ_2 καθώς και από το σημείο $O(0,0,0)$

Λύση:

Η ζητούμενη σφαίρα ανήκει στη σειρά σφαιρών που ορίζουν οι Σ_1 και Σ_2 άρα θα έχει εξίσωση

$$\lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z - 40) + \mu(x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 20) = 0$$

Επειδή το $O(0,0,0)$ πρέπει να είναι σημείο της σφαίρας αν ζητήσουμε, θα πρέπει να ισχύει

$$-\lambda \cdot 40 - \mu \cdot 20 = 0 \Rightarrow \boxed{\mu = -2\lambda}$$

Συνεπώς, για $\mu = -2\lambda$:

$$\lambda \{ x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y + 4z \} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y + 4z = 0}$$

29/03/2018

Σφαίρα

• Σφαίρα κέντρο $K(\alpha, \beta, \gamma)$ και ακτίνα R .

i) Διασυνέκτιση εξίσωσης: $\| \vec{x} - \vec{x}_K \| = R$

ii) Κανονική εξίσωση: $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = R^2$

iii) Γεν. ειναι δοτ. σε σημείο $P(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$

$$(x - \alpha)(x_0 - \alpha) + (y - \beta)(y_0 - \beta) + (z - \gamma)(z_0 - \gamma) = R^2$$

• Αναγωγή εξίσωσης

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\text{κέντρο } K(-A/2, -B/2, -C/2)$$

$$R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 4D}}{2}$$

Εφαπτόμενο επίπεδο σε $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 + \frac{A}{2}(x+x_0) + \frac{B}{2}(y+y_0) + \frac{C}{2}(z+z_0) + D = 0$$

• Αν P_1, P_2, P_3, P_4 ~~είναι~~ ~~μ~~-βασισμός επιφάνειας Σ η Σ είναι
 που περιγράφει από τα επιφάνειας Σ είναι

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Εάν Σ_1, Σ_2 είναι επιφάνειες που περιγράφονται με εξισώσεις

$$S_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$S_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Τότε με διαφορές τις των 2, μ η εξίσωση

$$\lambda S_1(x, y, z) + \mu S_2(x, y, z) = 0$$

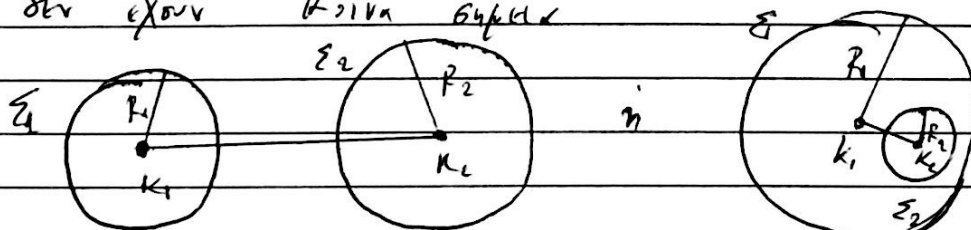
περιγράφει επιφάνεια που διέρχεται από την $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$

ΘΕΩΡΗΜΑ

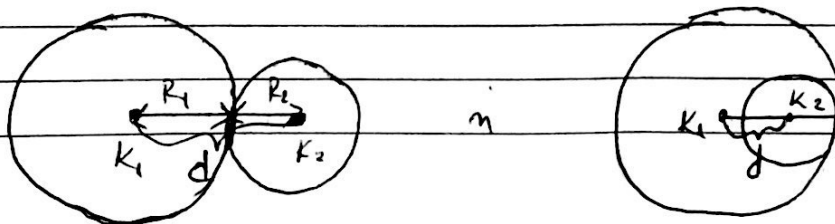
Θεωρούμε ~~δύο~~ δύο επιφάνειες Σ_1 και Σ_2 με
 κέντρα $K_1(x_1, y_1, z_1)$, $K_2(x_2, y_2, z_2)$ και
 ακτίνας R_1, R_2 αντίστοιχα. Ορίζουμε
 $d = \|K_1 K_2\|$

Τότε:

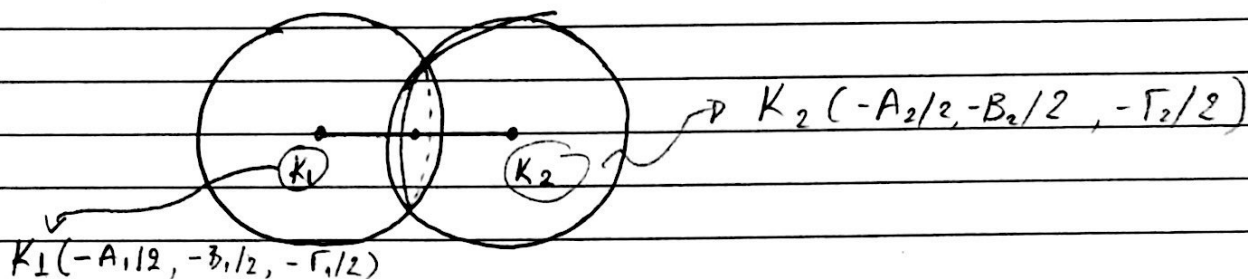
(α) Εάν $d > R_1 + R_2$ ή $d < |R_1 - R_2|$, οι επιφάνειες
 δεν έχουν κοινή επιφάνεια



(β) Εάν $d = R_1 + R_2$ ή $d = |R_1 - R_2|$, τότε οι επιφάνειες έχουν
 ένα κοινό σημείο στο οποίο τα εφαπτόμενα επίπεδα συμπίπτουν.



(γ) Εάν $|R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2$, τότε οι σφαίρες τέμνονται. Η περίπτωση αυτή είναι κλάδος το κέντρο του οποίου βρίσκεται σε επίπεδο που ενώνει τα κέντρα των σφαιρών.



Αντίστοιχα: Τα (α), (β) πράινουν ότι επιγνώνται αντίστοιχα οι Σ_1 και Σ_2 περιγράφονται από τις εξισώσεις

$$\begin{cases} \Sigma_1: x^2 + y^2 + z^2 + A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1 = 0 \\ \Sigma_2: x^2 + y^2 + z^2 + A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2 = 0 \end{cases}$$

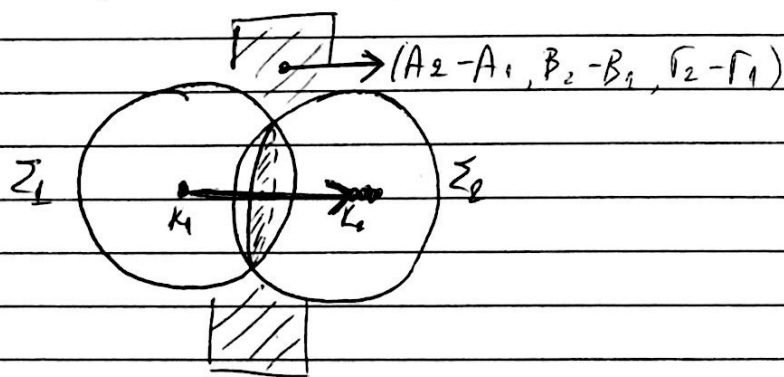
Το τελευταίο βήμα πρέπει να δοθεί ως

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1 = 0 \\ (A_2 - A_1)x + (B_2 - B_1)y + (\Gamma_2 - \Gamma_1)z + \Delta_2 - \Delta_1 = 0 \end{cases}$$

όπου τότε σφαίρες με κάθετο με είναι κλάδος. Παρατηρείται ότι το επίπεδο

$$(A_2 - A_1)x + (B_2 - B_1)y + (\Gamma_2 - \Gamma_1)z + \Delta_2 - \Delta_1 = 0$$

έχει κλάδο κλάδο με K_1, K_2 .



↳

ΑΡΙΣΤΟ

↗

ΨΑΛΛΑΔΙΟ Γ

① Νδ. η εδωον

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z + 9 = 0$$

Απλοποιεί γραφ. της οφείας να βρωτε το
κέντρο και ακτίνα

Λύση: Υπολογισμός

$$0 = x^2 - 2x + y^2 + z^2 + 6z + 9$$

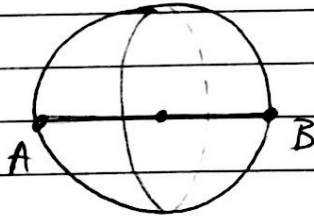
$$\Leftrightarrow -9 + 1 + 9 = (x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 1$$

Αρα έχουμε γραφ. με κέντρο $K(1, 0, -3)$ και
ακτίνα $\rho = 1$

② Δίνεται τα σημεία $A(5, 2, -1)$, $B(-3, 4, 7)$
Να βρεθεί η γραφ. που έχει διάμετρο το AB

Λύση:



Αρα η ακτίνα είναι

$$\rho = \frac{1}{2} \|\vec{AB}\| = \frac{1}{2} \sqrt{8^2 + 2^2 + 8^2}$$

Το κέντρο είναι το μέσο των σημείων AB

$$\text{Αρα } K = \left(\frac{5-3}{2}, \frac{4+2}{2}, \frac{7-1}{2} \right) = (1, 3, 3)$$

L_D

③ Ν.δ.ο. οι εστίες

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z - 20 = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

Ορίστε κινδύνο να ονομάζουμε βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.

Λύση:

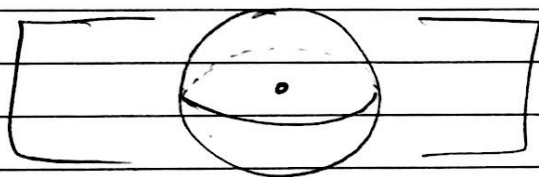
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 4z + 4 - 34 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 34$$

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 34$$

Το κέντρο της σφαίρας είναι $K = (3, -1, 2)$, το οποίο βρίσκεται στο επίπεδο $z = 2$.

Από την εσοχή του κέντρου στο επίπεδο $z = 2$ βρίσκουμε το κέντρο της σφαίρας $K = (3, -1, 2)$.

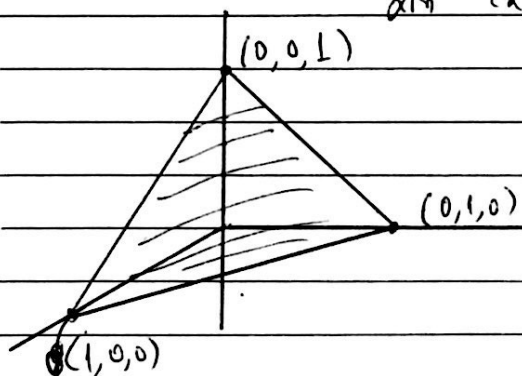


⑤ Δίνεται τα σημεία $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $\Gamma(0, 0, 1)$

$\Delta(1/2, 0, 1/2)$, $E(1, 2, 3)$. Να εστιάσει αν από τις τριπλές $\{A, B, \Gamma, \Delta\}$ και $\{A, B, \Gamma, E\}$ διαφύκει σφαίρα. Αν ναι να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.

Λύση: AS υπολογίζουμε το επίπεδο που διαφύκει από τα σημεία A, B, Γ .

Το επίπεδο που διαφύκει τα A, B, Γ είναι $x + y + z = 1$ (Π)



$$1^\circ (x + y + z - 1 = 0)$$

$$2^\circ (x, y, z) = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB} + \gamma \vec{OG}$$

$$3^\circ A(1, 0, 0) \text{ η } \beta \text{ και } \gamma \text{ είναι ίσες.}$$

Επεί το Δ περιέχει την εξίσωση του Π τα σημεία $\{A, B, \Gamma, \Delta\}$ θα πρέπει να βρίσκονται στην εξίσωση.

Το E βρίσκεται εκτός του Π διότι οι συντεταγμένες του δεν ικανοποιούν την εξίσωση του Π . Βρούμε να βρούμε την εξίσωση της επιφάνειας που διέρχεται από τα A, B, Γ, E . Η εξίσωση θα έχει τη μορφή: $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

Αρκεί να βρούμε τα a, b, c, d .

Επειδή A, B, Γ, E βρίσκονται στην επιφάνεια έχουμε:

$$\begin{cases} A: 1 + a + d = 0 \\ B: 1 + b + d = 0 \\ \Gamma: 1 + c + d = 0 \\ E: 14 + a + 2b + 3c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 - \frac{8}{5} \\ b = -1 - \frac{8}{5} \\ c = -1 - \frac{8}{5} \\ d = \frac{8}{5} \end{cases}$$

⑥ Μια επιφάνεια έχει κέντρο το $K(3, 1, 5)$ και επιφάνεια 6. Η εξίσωση του Π είναι $2x - y + 2z + 3 = 0$. Να βρεθεί η εξίσωση.

Λύση:



Αρκεί να βρούμε την απόσταση $d(K, \Pi)$ διότι αυτή θα είναι η ακτίνα.

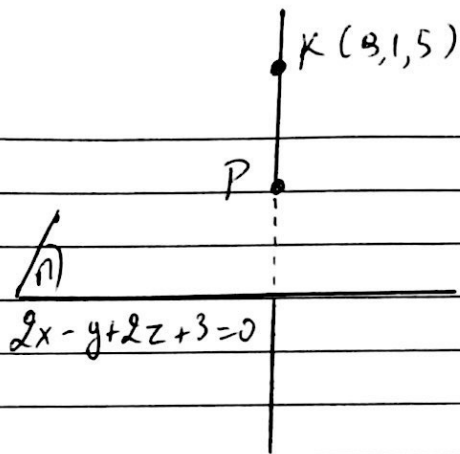
$$d(K, \Pi) = \frac{|2 \cdot 3 - 1 + 2 \cdot 5 + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = R$$

2ος τρόπος: Πως θα βρούμε πρώτα να βρούμε την απόσταση του K από το Π .

Ας βρούμε το σημείο P της ευθείας που διέρχεται από το K και είναι κάθετη στο Π .

↳





H ευθεία έχει παραμετρικά διάνυσμα το $\vec{h} = (2, -1, 2)$ αφού είναι κάθετο στο επίπεδο.

Άρα στην εξίσωση

$$\vec{x} = (3, 1, 5) + t(2, -1, 2)$$

$$(x, y, z) = (3+2t, 1-t, 5+2t)$$

Με αντικατάσταση

$$0 = 2(3+2t) - (1-t) + 2(5+2t) + 3$$

$$\Rightarrow t = -2$$

Το αντίστοιχο σημείο είναι το

$$P = (3-4, 1+2, 5-4) = (-1, 3, 1)$$

Και η απόσταση είναι

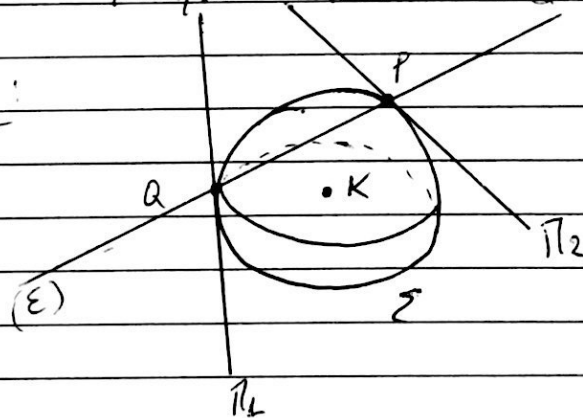
$$R = \|\vec{PK}\| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2}$$

(9) Δίνεται η επιφάνεια Σ με εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 8z = 21$ και η ευθεία

$$\vec{x} = (2, 3, 2) + t(1, 0, -1)$$

Να βρεθούν τα σημεία τομής της ευθείας με την επιφάνεια και να εφαρμοστεί το κριτήριο για την επιφάνεια.

Λύση:



Θα πρέπει να βρούμε για ποια t η (ε)

εφαπτόμενη της επιφάνειας

$$(2+t)^2 + 3^2 + (2-t)^2 - 4(2+t) - 6 \cdot 3 + 8(2-t) = 21$$

$$\Rightarrow 21 = 2t^2 - 12t + 17 - 6 - 18 + 16$$

$$\downarrow$$

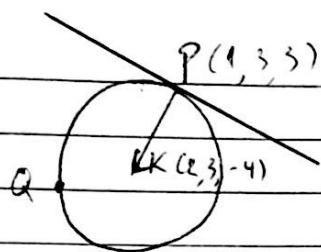
$$t = -1$$

$$\downarrow$$

$$t = 7$$

από τα σημεία τομής

$$P(1, 3, 3) \text{ και } Q(9, 3, -5)$$



Το τμήμα είναι μέτρο Geo

$\vec{KP} = (-1, 0, 4)$ και ορθώνεται στο P

$$\text{Αρα } (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = 0$$

$$\Rightarrow -x + 1 + 7z + 16 = 0$$

Ορίων βρισκόμαστε το επίπεδο εφαπτόμενο στο Q

17/04/2018

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

① Με χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz, να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $g(x, y, z) = x - y + 3z$ όταν τα x, y, z ικανοποιούν την εξίσωση $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1$

$$|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \quad (C-S)$$

Μέγιστη τιμή επιτυγχάνεται όταν $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1 \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \vec{b}$

Ελάχιστη τιμή επιτυγχάνεται όταν $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$

$$- \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \leq \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$$

$$2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (x\sqrt{2})^2 + (y\sqrt{3})^2 + (2z)^2 = 1 \Leftrightarrow \text{Αν θέσω } \vec{u} = (x\sqrt{2}, y\sqrt{3}, 2z), \text{ τότε } \|\vec{u}\|^2 = 1$$

$$g(x, y, z) = x - y + 3z \leadsto \text{Παρατηρούμε ότι έχουμε } \vec{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 3 \right)$$

$$\text{Τότε } g(x, y, z) = \langle \vec{a}, \vec{u} \rangle$$

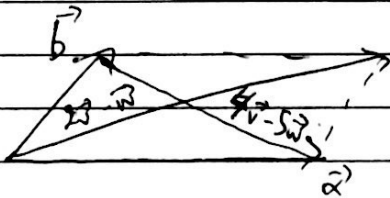
$$\text{Οπότε η μέγιστη τιμή της } g \text{ είναι } \|\vec{a}\| \|\vec{u}\| = \sqrt{\frac{37}{12}}$$

$$\text{η ελάχιστη τιμή της } g \text{ είναι } -\|\vec{a}\| \|\vec{u}\| = -\sqrt{\frac{37}{12}}$$

② Δύο παραβόλια διακίβαν $\vec{v}$ και $\vec{w}$ εκπέμπουν ημίτονο. Βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου που σχηματίζεται από τα διανύσματα $2\vec{v} - \vec{w}$, $4\vec{v} - 5\vec{w}$

LD

$$\left. \begin{aligned} \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1 \\ \varphi = \angle(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\pi}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\text{Αν γνωρίζουμε τις μήκη } \vec{a}, \vec{b} \text{ του} \\ &\text{παρίχνω τότε} \\ &\text{Γεωμετρικά } \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \varphi \end{aligned}$$



$$2\vec{v} - \vec{w} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$4\vec{v} - 5\vec{w} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\textcircled{+} \quad 2\vec{a} = 6\vec{v} - 6\vec{w} \Rightarrow \vec{a} = 3\vec{v} - 3\vec{w}$$

$$\textcircled{-} \quad 2\vec{b} = -2\vec{v} + 4\vec{w} \Rightarrow \vec{b} = -\vec{v} + 2\vec{w}$$

$$\begin{aligned} \text{Αρα το διάνυσμα } \vec{a} \times \vec{b} \text{ είναι } \|\vec{a} \times \vec{b}\| &= \|(3\vec{v} - 3\vec{w}) \times (-\vec{v} + 2\vec{w})\| \\ &= \|6\vec{v} \times \vec{w} + 3\vec{w} \times \vec{v}\| = \|3\vec{v} \times \vec{w}\| = 3\|\vec{v} \times \vec{w}\| = 3\|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \sin \frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

③ Έστω χιπο δίνονται δύο διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ με μήκη ίσα με 1 και τέτοια ώστε να ισχύει $((\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \times \vec{v}_2) \times \vec{v}_2 = \vec{v}_1$

$$\|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = 1 \quad \text{και} \quad \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \quad \text{χρησιμοποιώ το 1^ο γεγονός:}$$

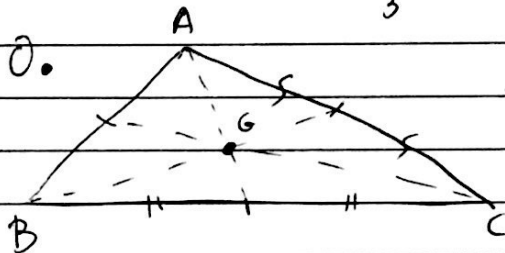
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a}$$

$$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \times \vec{v}_2 = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle \vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{v}_2 \rangle \vec{v}_1 = -\vec{v}_1$$

0, διότι $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$

$$\begin{aligned} \text{Αρα η συνθήκη παραμένει ισοδύναμη με } (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \times \vec{v}_2 &= \\ &= -[\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle \vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{v}_2 \rangle \vec{v}_1] = +\vec{v}_1 \quad \text{αφ' ου } \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \end{aligned}$$

④ Ν.δ.ο. η διευθετική $\vec{OG}$ της επιφάνειας G των σημείων (κέντρο βαρύτητας) τριγώνου ABC , ως προς άξονα O είναι $\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$



$$\text{λογιστέ: } \vec{AG} = \frac{2}{3} \vec{AM}, \quad (*) \rightarrow \text{απόδειξη με}$$

απόδειξη με

↳

M1 για το τμήμα BC: $\vec{AM}_1 = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2}$, οπότε

$$\vec{AG} = \frac{1}{3} (\vec{AB} + \vec{AC}) \Rightarrow \vec{AO} + \vec{OG} = \frac{1}{3} [\vec{AO} + \vec{OB} + \vec{AC} + \vec{OC}]$$

$$\Rightarrow \vec{OG} = \frac{1}{3} [2\vec{AO} - 3\vec{AO} + \vec{OB} + \vec{OC}] =$$

$$= \frac{1}{3} [\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}]$$

Από Σημώματα (*) $\Rightarrow$ Από $\vec{AG} \parallel \vec{AM}_1$ τότε $\vec{AG} = 2\vec{AM}_1$

$$\vec{AG} = 2 \left(\frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2} \right) = \left| \frac{2}{2} \vec{AB} + \frac{2}{2} \vec{AC} \right| \quad (1)$$

$$\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{BG} \quad \underline{\vec{BG} \parallel \vec{BM}_1} \quad \vec{AB} + \mu \vec{BM}_1 \quad \underline{\mu \in \mathbb{R}}$$

$$\vec{AB} + \mu \left(\frac{\vec{BC} + \vec{BA}}{2} \right)$$

Οπότε $\vec{AG} = \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \vec{AB} + \frac{\mu}{2} \vec{BC} = \left| \frac{(1-\mu)\vec{AB} + \mu}{2} \vec{AC} \right| \quad (2)$

$\vec{BA} + \vec{AC}$

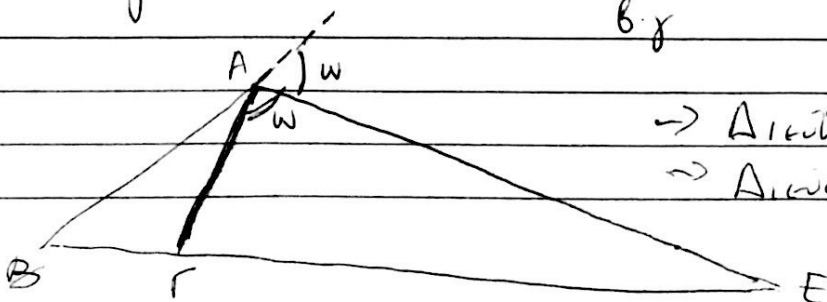
Αν: (1) - (2):

$$(1-\mu)\vec{AB} + \frac{\mu}{2} \vec{AC} = \frac{2}{2} \vec{AB} + \frac{2}{2} \vec{AC} \Rightarrow (1-\mu-\frac{2}{2})\vec{AB} +$$

$$+ \left(\frac{\mu}{2} - \frac{2}{2}\right) \vec{AC} = \vec{0}$$

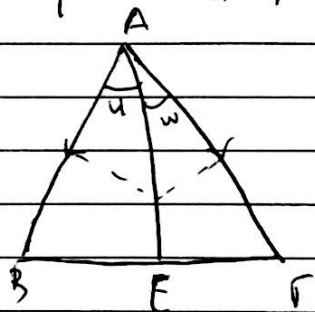
Οπότε $\vec{AB}, \vec{AC}$ γ.α.σ. σημαίνει: $\begin{cases} 1-\mu-\frac{2}{2}=0 \\ \frac{\mu}{2} - \frac{2}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \mu=2=\frac{2}{3}$

(5) Στο παραπάνω σχήμα AE είναι η διχοτόμος διχοτόμος
 του γωνίας A. Ν.τ.ο $\vec{AE} = \frac{1}{b \cdot \gamma} (b\vec{AB} - \gamma\vec{AP})$



$\Rightarrow$ Διχοτόμος ε.δ. διχοτόμος
 $\Rightarrow$ Διχοτόμος ε.α. διχοτόμος

• Εξωτερικοί διχοτόμοι

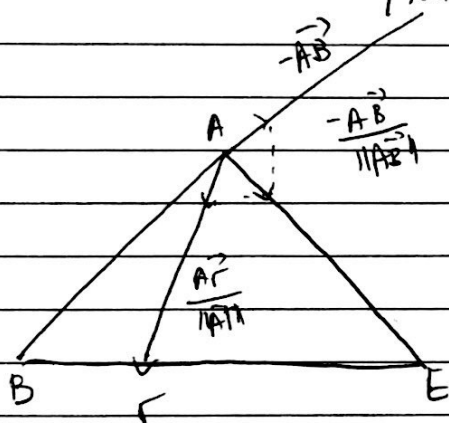


Συν ρόλο οι διχοτόμοι
είναι των διχοτόμων

Κανονικά μοναδιαία: $\frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$ μοναδιαίο $\frac{\vec{AF}}{\|\vec{AF}\|}$ μοναδιαίο

$$\text{Αρα } \vec{AE} = 2 \left(\frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} + \frac{\vec{AF}}{\|\vec{AF}\|} \right)$$

Διαιρών με 2 εξωτερικούς διχοτόμους



εξωτερικοί διχοτόμοι:

$$\vec{AE} = 2 \left[\frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} + \frac{\vec{AF}}{\|\vec{AF}\|} \right]$$

$$\vec{AE} = 2 \left[\frac{\vec{AF}}{\beta} - \frac{\vec{AB}}{\gamma} \right] \quad (1)$$

$$\text{Αν } \vec{BE} = \mu \vec{CE} \text{ τότε: } \vec{BA} + \vec{AF} = \mu (\vec{CA} + \vec{AE})$$

$$\Rightarrow \vec{AE} = -\frac{1}{\mu} \vec{AB} + \frac{1+\mu}{\mu} \vec{AF} \quad (2)$$

$$\text{Από τις (1), (2): } \frac{2}{\beta} \vec{AF} - \frac{2}{\gamma} \vec{AB} = -\frac{1}{\mu} \vec{AB} + \frac{1+\mu}{\mu} \vec{AF}$$

$$\left(\frac{2}{\beta} - \frac{1+\mu}{\mu} \right) \vec{AF} + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{2}{\gamma} \right) \vec{AB} = \vec{0}$$

Ly

Από γραμμικές ανεξαρτησίες των $\vec{AB}, \vec{AC}$

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{B} - \left(\frac{1}{\mu} + 1 \right) = 0 \\ \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\gamma} \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{\gamma}{\gamma - b} \quad \mu = \frac{b}{\gamma - b}$$

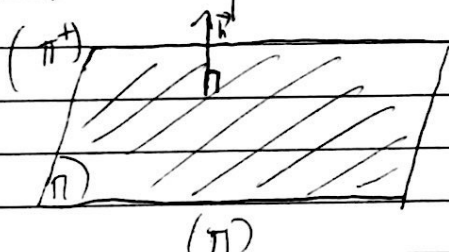
Αντικαθιστώντας στην εξίσ. (1):

$$\vec{AE} = \lambda \left[\frac{B\vec{A}}{\gamma} + \frac{\vec{AC}}{b} \right] \text{ έχουμε ότι:}$$

$$\vec{AE} = \frac{1}{\gamma - b} [b\vec{AB} - \gamma\vec{AC}]$$

6) Δίνεται το επίπεδο (π) με συνιστώσες εξίσωσης $2x + y + z = 1$

α) Να μετρηθεί ο όγκος του αστεύρου ημικύβου στο (π)



(π^+) ο ημικύβος που βρίσκεται πάνω στο $\vec{n}$
 $\vec{n} = (2, 1, 1)$

Ορίζω $f(x, y, z) = 2x + y + z - 1$

Εντάξει ο όγκος $(x_1, y_1, z_1) \in (\pi)$ αν $f(x_1, y_1, z_1) = 0$

$$(x_1, y_1, z_1) \in (\pi^+) \Leftrightarrow f(x_1, y_1, z_1) > 0$$

$$(x_2, y_2, z_2) \in (\pi^-) \Leftrightarrow f(x_2, y_2, z_2) < 0$$

Ας εστιάσουμε στο $(0, 0, 0) \in \pi$ αν ημικύβος αριστερά

$$\rightarrow f(0, 0, 0) = -1 \rightarrow (0, 0, 0) \in (\pi^-)$$

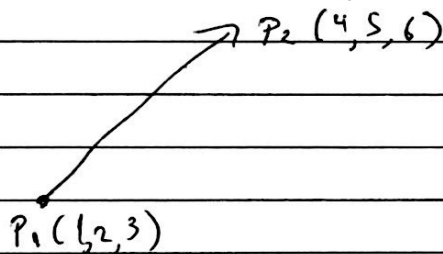
6) Punkt Abstand zu $(0,0,0)$ aus z/a

$$d((0,0,0), \Pi) = \frac{|2x_0 + y_0 + z_0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

oder $d(0', \Pi) = \frac{1}{\sqrt{6}}$ (Analoge Ergebnis aus Formel)

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

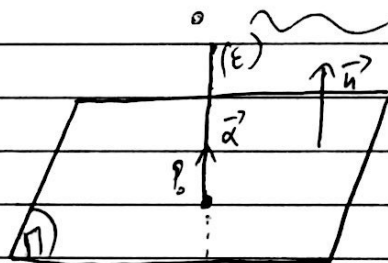
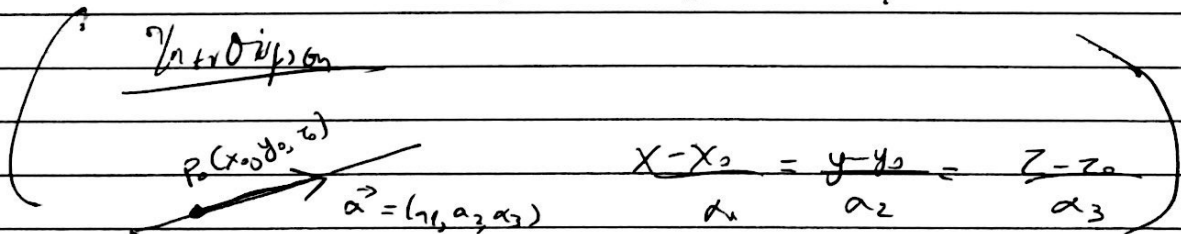
(7) Na Punkte in Ebene aus gegeben aus zu Guyria
 $P_1(1,2,3)$ und $P_2(4,5,6)$ und die Ebene
 die die Ebene ist $8x + 7y - 6z - 5 = 0$



Die Vektoren $\vec{P_1P_2}$ und $\vec{n}$
 $\vec{P_1P_2} = (4-1, 5-2, 6-3) = (3, 3, 3) = 3(1, 1, 1)$

Die Gleichung der Ebene ist

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1} \quad (*)$$



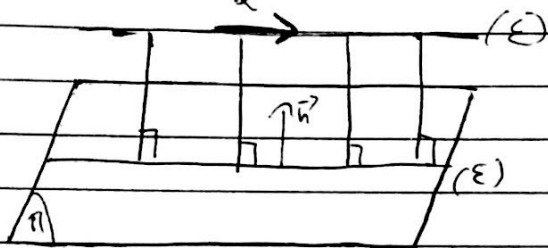
$A \vee (E) \perp (\Pi)$, also n
 Parallel zu (E) also $\vec{a} \parallel \vec{n}$
 Es gilt $\vec{a} \parallel \vec{n}$

LD

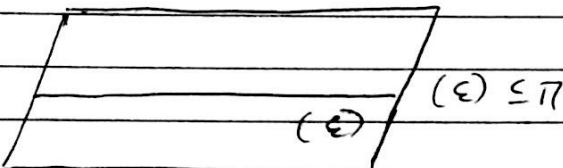
2

$\epsilon // (\pi)$

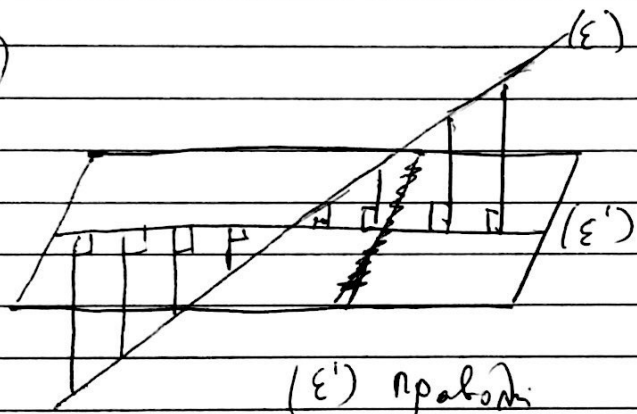
$\vec{\alpha}$



η προβολή της (ε) είναι η ίδια
 Ζητούμεται $\langle \vec{\alpha}, \vec{n} \rangle = 0$



3



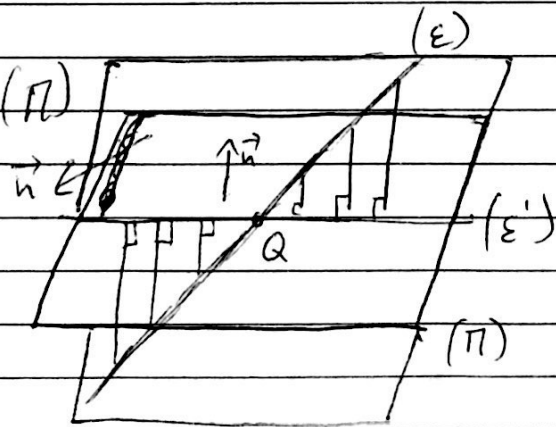
(ε') προβολή

Το επίπεδο (π) $8x + 7y - 6z - 5 = 0$ έχει

νόρμας $\vec{n} = (8, 7, -6)$

$\vec{n} \nparallel \vec{\alpha}$ και $\langle \vec{\alpha}, \vec{n} \rangle = 8 + 7 - 6 \neq 0$

Άρα η προβολή είναι η β)



Οποιαδήποτε ευθεία (π') που
 περιέχει το επίπεδο (ε) και είναι
 κάθετη στο επίπεδο (π)

είναι η (ε')

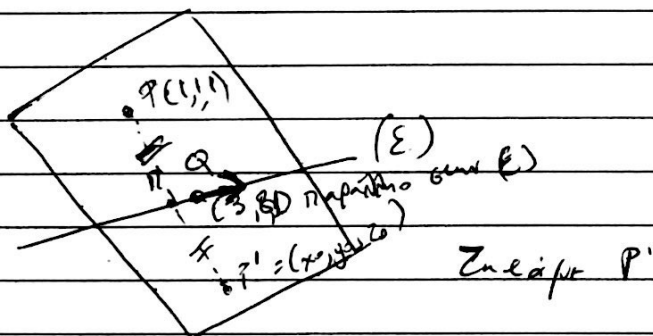
$$\begin{aligned} \vec{r} \times \vec{a} &= \vec{b} \\ \Rightarrow \vec{r} \times \vec{a} &= \vec{b} \\ \Rightarrow \vec{r} \times \vec{a} &= \vec{b} \end{aligned}$$

At first $x=0$ to $(1, 2, 3)$ $\dot{x}$ z maximize $13 - 14 \cdot 2 + 3 \cdot 3$
 After $N=12$ z minimize (n') : $13x - 14y + z + 12 = 0$

Kači būdinga, $n(\epsilon')$ apibrėžti gimn n tų ir ca caigėi.

$$\begin{cases} 13x - 14y + z + 12 = 0 \\ 8x + 7y - 6z - 5 = 0 \end{cases}$$

18) Nach Graphen zu substituieren von Graphen $P(1,1,1)$ was
also erhalten für Gleichungen $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{8} = \frac{z-3}{1} \quad (\varepsilon)$



(n): $3x + 8y + z + \Delta = 0 \Rightarrow$ Lsg. für $\Delta = -12$
 $\Rightarrow 3 + 8 + 1 + \Delta = 0 \Rightarrow \Delta = -12$

$$\text{LD (17): } 3x + 8y + z - 12 = 0$$

LP

$$(e) : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{8} = \frac{z-3}{1} = t$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 3t+1 \\ y = 8t+2 \\ z = t+3 \end{array} \right\} \text{ determine } Q(1000, 0, 0) \text{ on } \text{hyperplane } t = -5137$$

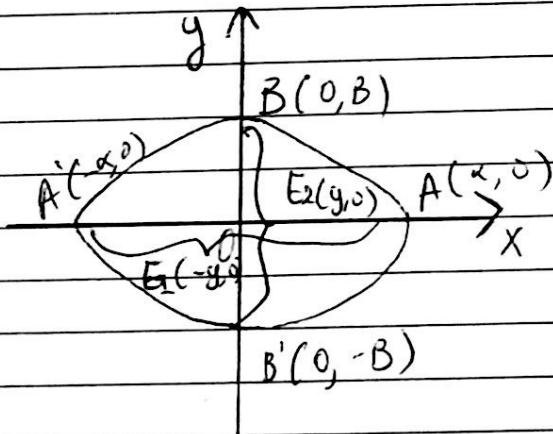
Apa $Q\left(\frac{22}{37}, \frac{-3}{37}, \frac{22}{37}\right)$ are coordinates
on $(*)$ (2)

Ans: (1) (2)

$$\Rightarrow P' \left(\frac{1}{37}, \frac{-43}{37}, \frac{27}{37} \right)$$

24/04/2018

Ellipse



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$b^2 = a^2 - y^2$$

Eccentricity: $e = \frac{y}{a}$
 $0 \leq e \leq 1$

↳

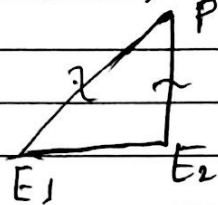
ΥΑΕΡΒΟΛΗ

[ΟΡΙΣΜΟΣ]

Ουδία βολή υπερβολή με εσείς τα σημεία E_1, E_2 των κορυφών της των εστιών τα εστίδια ή των ιδιοτήτων:

$$|d(P, E_1) - d(P, E_2)| = 2\alpha, \quad \alpha > 0$$

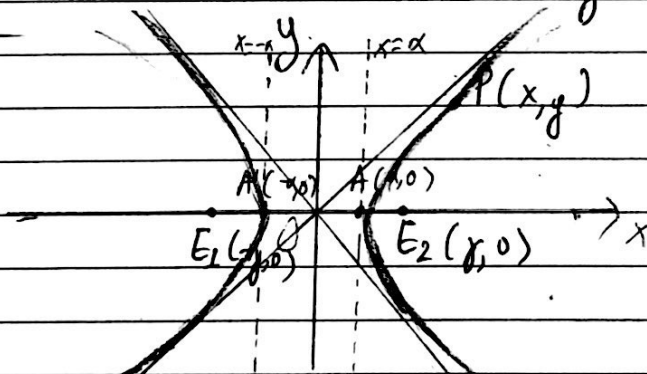
$$d(E_1, E_2) = 2\gamma > 0$$



Από τριγωνική ανισότητα έχω

$$|d(P, E_1) - d(P, E_2)| \leq d(E_1, E_2) \Leftrightarrow$$

$$2\alpha \leq 2\gamma \Leftrightarrow \boxed{\alpha \leq \gamma}$$



Το $P(x, y)$ ανήκει στην υπερβολή αν - αν

$$|\sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2} - \sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2}| = 2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$$

□

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} + 1 \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq a^2$$

$$\Leftrightarrow |x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \text{ ή } x \leq -a$$

Οι εστίες ή εστίες $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$ ονομάζονται

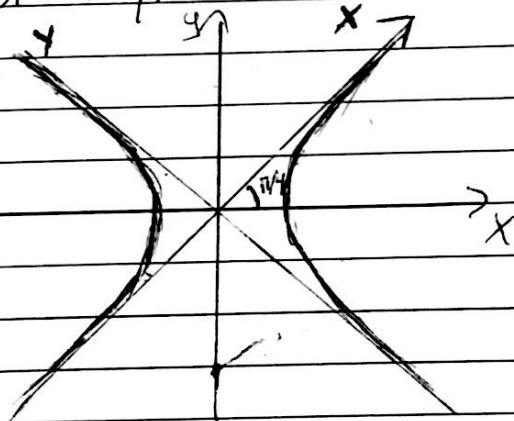
αξονικές ή υπερβολής ή εστίες $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

ΠΡΟΣΗΜΟ Η υπερβολή ονομάζεται ισόκυβη $\Leftrightarrow a = b$

Η εστίαση βομβηδών υπερβολής είναι:

$$x^2 - y^2 = a^2$$

Οι στ. αξονικές είναι $x \pm y = 0$



Θέτουμε το σύστημα OXY που προκύπτει από το Oxy ή περιστροφή κατά γωνία $\pi/4$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

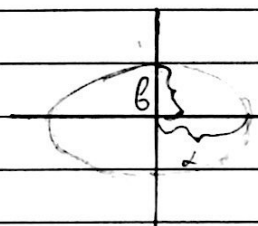
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} (X - Y) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} (X + Y) \end{cases}$$

$$x^2 - y^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-y)^2 - \frac{1}{2}(x+y)^2 = \alpha^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 - x^2 - 2xy - y^2 = 2\alpha^2$$

$$\Leftrightarrow \underline{2xy = -\alpha^2}$$

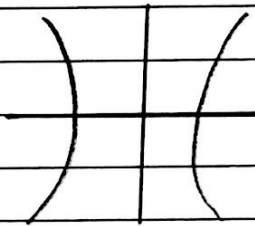
Ελλειψη



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

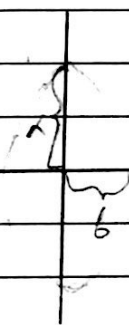
$$a > b$$

Υπερβολη

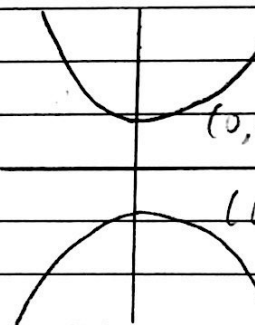


$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 1$$



$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$(0, a)$
 $(0, -a)$

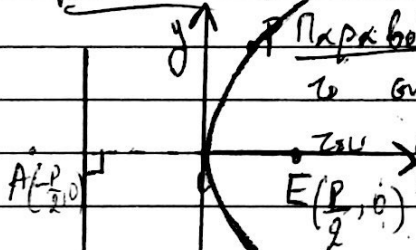
Παραβολη

ΟΡΙΣΜΟΣ

Δίνεται ευθεια ε και επιφαν $E \notin \varepsilon$. Κατασκευ

Παραβολη με διευθετους εν ευθεια ε και εστια το επιφαν E των γεωμετρικω των επιφανων P του καυδου τοτου δεσφ :

$$d(P, \varepsilon) = d(P, E)$$



Παρατηρηται : Φερω φηρα $AE \perp \varepsilon$. Το πεσο O εν φηρας AE ειναι επιφαν της παραβολης

LP

Θέλουμε να βρούμε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από το σημείο P και είναι κάθετη στην ευθεία που περνάει από το σημείο P και το σημείο E .
 Τα σημεία A και E είναι σημεία της ευθείας που περνάει από το σημείο P και το σημείο E .
 Η ευθεία που περνάει από το σημείο P και το σημείο E έχει εξίσωση $y = \frac{2P}{x}$, $P > 0$. Τότε η ευθεία που είναι
 κάθετη στην ευθεία που περνάει από το σημείο P και το σημείο E είναι η ευθεία που περνάει από το σημείο P και το σημείο E .

Η ευθεία που περνάει από το σημείο P και το σημείο E είναι η ευθεία που περνάει από το σημείο P και το σημείο E .

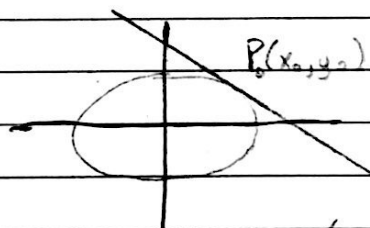
Το σημείο $P(x, y)$ ανήκει στην ευθεία που περνάει από το σημείο P και το σημείο E .
 Η ευθεία που περνάει από το σημείο P και το σημείο E είναι η ευθεία που περνάει από το σημείο P και το σημείο E .

$\Leftrightarrow d(P, \varepsilon) = d(P, E) \Leftrightarrow$

$\frac{|x + \frac{P}{2}|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \sqrt{\left(x - \frac{P}{2}\right)^2 + y^2} \Leftrightarrow$
 $y^2 = 2Px \geq 0$

Ελλειψς

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

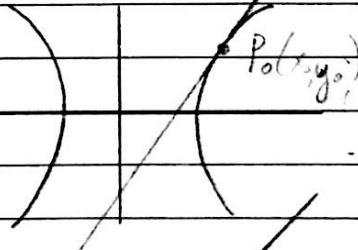


Η ευθεία που περνάει από το σημείο $P_0(x_0, y_0)$ και το σημείο $P(x, y)$ είναι η ευθεία που περνάει από το σημείο $P_0(x_0, y_0)$ και το σημείο $P(x, y)$.

$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$

Υπερβολς

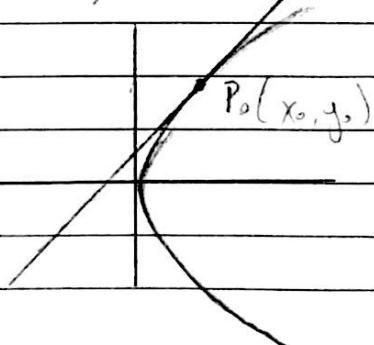
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

Παραβολς

$y^2 = 2Px$



$yy_0 = P(x + x_0)$

Πρόβλημα: Να βρεθεί η παρὰβoλὴ στο επίπεδο η
 εἰσὼς:

$$(*) Ax^2 + 2Bxy + \Gamma y^2 + \Delta x + Ey + Z = 0$$

ὅπου $(A, B, \Gamma, \Delta, E) \neq (0, 0, 0, 0, 0)$

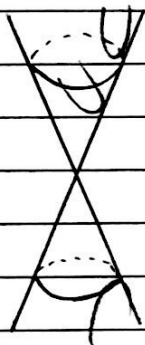
1) Ἐυθεία ἢ ἄλγη εὐθειῶν

π.χ. $x^2 - y^2 = 0 \quad x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ἢ } x = -2$

2) Κύκλος, 3) Ἐλλείψη, 4) Υπερβολή, 5) Παράβολο

6) $\emptyset$ π.χ. $x^2 + y^2 + 1 = 0$
 ἢ κύκλος

Κωνικές τομές



ΠΡΟΤΗΜΑ Κάθε εἰσὼς τῆς μορφῆς (*)
 παρὰβoλὴ ἢ ἀναγίρεται
 παρὰβoλῃ.

1^η Περίπτωση: $B = 0$ ἀποδοκίμα ο
 μέγιστος ὅρος

Παράδειγμα T_1 παρὰβoλὴ ἢ εἰσὼς

$$(*) x^2 + 4y^2 + 2x + 16y + 25 = 0$$

→ Κάνουμε παρὰβoλὴν μεταφορὰ τῶν εὐκλ. συντεταγμένων

	$\begin{aligned} x &= X + \alpha \\ y &= Y + \beta \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \text{Τότε } (*) \Leftrightarrow \\ & (X + \alpha)^2 + 4(Y + \beta)^2 \\ & + 2(X + \alpha) + 16(Y + \beta) \\ & + 25 = 0 \end{aligned}$
--	---	--

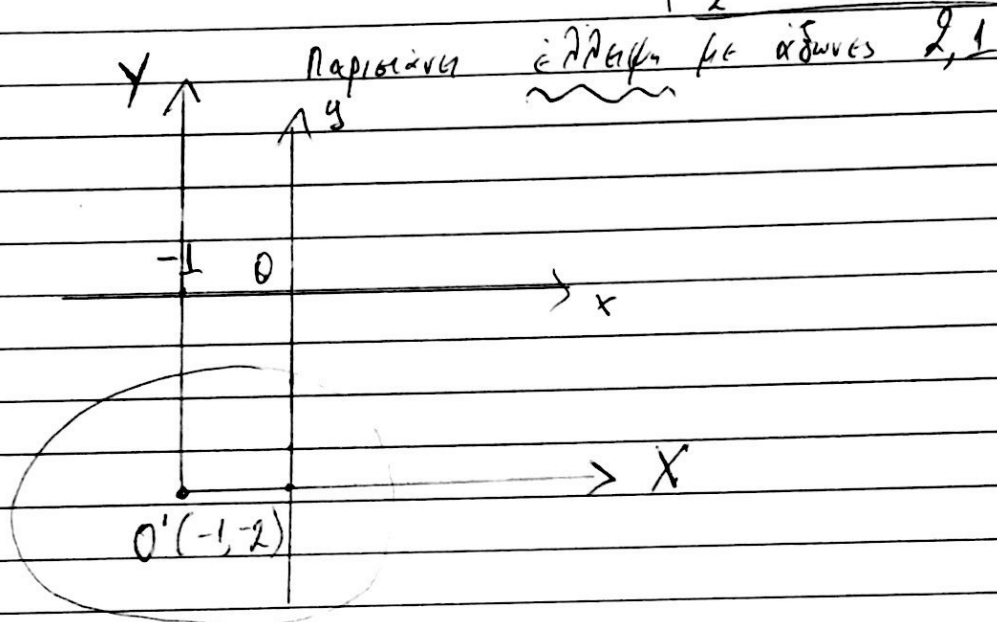
$$\Leftrightarrow X^2 + 2\alpha X + \alpha^2 + 4Y^2 + 8\beta Y + 4\beta^2 + 2X + 2\alpha + 16Y + 16\beta + 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 + 4Y^2 + 2(\alpha + 1)X + 8(\beta + 2)Y + \alpha^2 + 4\beta^2 + 2\alpha + 16\beta + 25 = 0$$

↳

Επίσης αρχί έτσι ώστε $\alpha+1=0$, $\beta+2=0 \Leftrightarrow$

Τότε $(*) \Leftrightarrow X^2 + 4Y^2 - 4 = 0$
 $\Leftrightarrow X^2 + 4Y^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{X^2}{2^2} + \frac{Y^2}{1^2} = 1 \end{cases}$



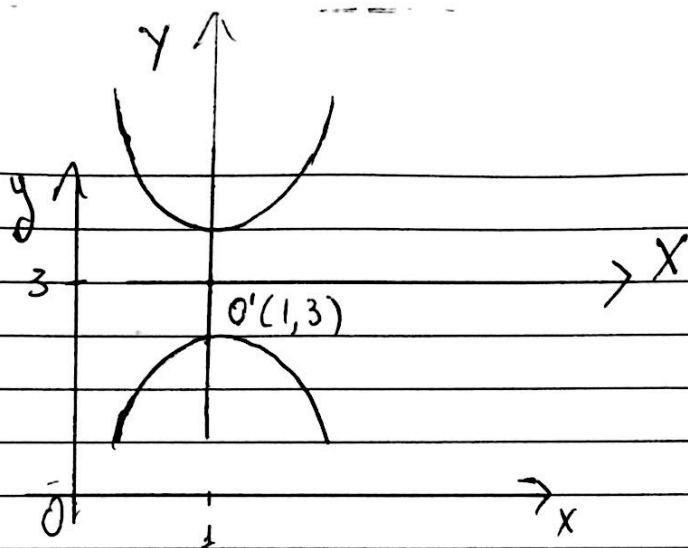
Παράδειγμα Τι παρίστανται η $\epsilon \xi \omega \sigma \eta$
 $9x^2 - 4y^2 + 24y - 18x + 45 = 0; (*)$

Θέτουμε $O'XY$ παράλληλη μεταφορά του αρχικού
 Oxy με αρχή $O'(\alpha, \beta)$. Γνωρίζουμε ότι
 $x = X + \alpha$, $y = Y + \beta$

$(*) \Leftrightarrow 9(X+\alpha)^2 - 4(Y+\beta)^2 + 24(Y+\beta) - 18(X+\alpha) + 45 = 0$
 $\Leftrightarrow 9X^2 - 4Y^2 + (18\alpha - 18)X + (-8\beta + 24)Y + 9\alpha^2 - 4\beta^2 + 24\beta - 18\alpha + 45 = 0$

Επίσης να αρχί $O'(\alpha, \beta)$ έτσι ώστε $\alpha = 1$ και $\beta = 3$

$(*) \Leftrightarrow 9X^2 - 4Y^2 + 12 = 0$
 $\Leftrightarrow 4Y^2 - 9X^2 = 12$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{Y^2}{3} - \frac{X^2}{4} = 1 \end{cases}$



Παράδειγμα 1: Να μετατρέψουμε η εξίσωση $x^2 + 4y - 6x + 1 = 0$ (*)

Θέτουμε $O'XY$ αρχικό σημείο μεταφοράς το αρχικό O_{xy} με αρχή $O'(a, b)$. Γυρνάμε οπότε $x = X + a$ και $y = Y + b$

$$(*) \Leftrightarrow (X+a)^2 + 4(Y+b) - 6(X+a) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

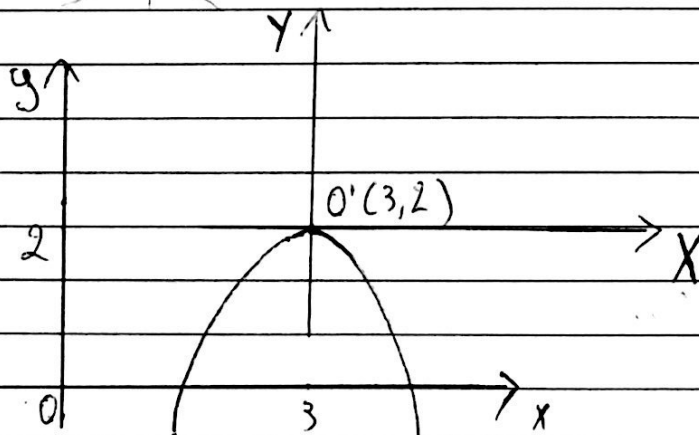
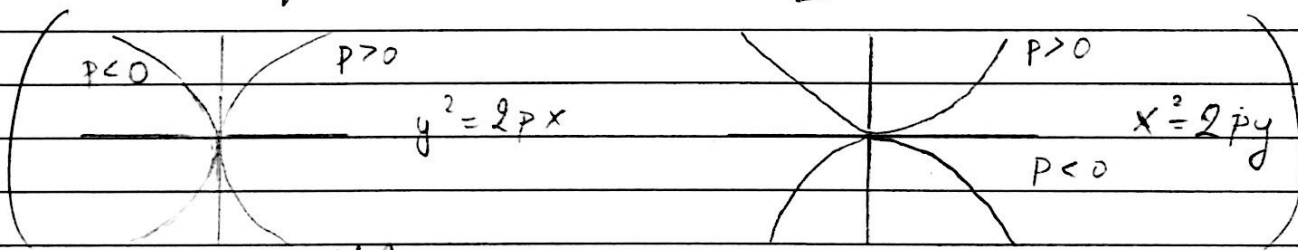
$$X^2 + (2a-6)X + 4Y + a^2 + 4b - 6a + 1 = 0$$

Ενδεχομένως αρχικά O' είναι ώστε $2a - 6 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 3}$

$$(*) \Leftrightarrow X^2 + 4Y + 4b - 8 = 0$$

Ενδεχομένως αρχικά ώστε $4b - 8 = 0 \Leftrightarrow \boxed{b = +2}$

Αρ $X^2 + 4Y = 0 \Leftrightarrow \boxed{X^2 = -4Y}$



08/05/2018

ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΑ ΠΑΡΑΒΟΛΟΙΣ

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2yz \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 2xy \end{array} \right. \quad \text{ή} \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 2yx \quad \boxed{y \neq 0}$$

Τομή με ευθεία $z=1$

$$\left\{ \begin{array}{l} z=1 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2yz \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z=1 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2y \end{array} \right.$$

$$\bullet \boxed{A \vee \lambda = 0} \quad \left\{ \begin{array}{l} z=0 \\ \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) = 0 \end{array} \right.$$

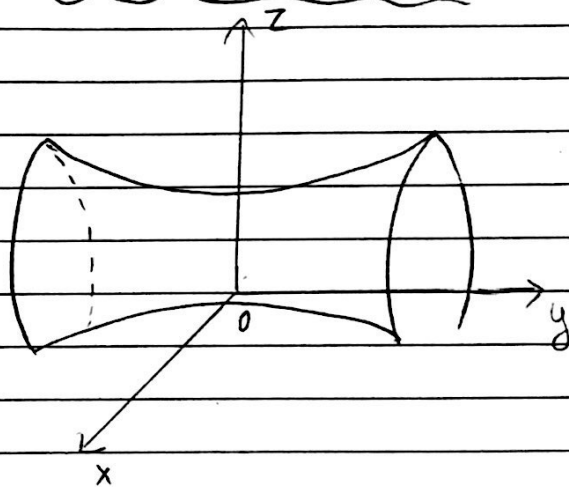
Αρα τέφρα το ευθεία $0xy$ ως ευθείες:

$$(\varepsilon_1): \left\{ \begin{array}{l} z=0 \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \end{array} \right. \quad (\varepsilon_2): \left\{ \begin{array}{l} z=0 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \end{array} \right.$$

$$\bullet \boxed{A \vee \lambda \neq 0} \quad \left\{ \begin{array}{l} z=1 \\ \frac{x^2}{a^2 2y} - \frac{y^2}{b^2 2y} = 1 \end{array} \right.$$

ΥΠΕΡΒΟΛΕΣ

Τομές με επίπεδο $y = \lambda$



$$\begin{cases} y = \lambda \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2yz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda \\ x^2 = 2a^2 \lambda z + \frac{\lambda^2}{b^2} a^2 \end{cases}$$

• $\boxed{A_v \quad \lambda = 0}$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 2a^2 y \end{cases}$$

ΠΑΡΑΒΟΛΗ

• $\boxed{A_v \quad \lambda \neq 0}$

$$\begin{cases} y = \lambda \\ x^2 = 2a^2 \lambda \left(z + \frac{\lambda^2 a^2}{b^2 2a^2 \lambda} \right) \end{cases}$$

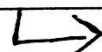
ΠΑΡΑΒΟΛΗ

A_v $P(x, y, z)$ είναι επιφάνεια των επιπέδων, τότε και $P'(-x, y, z)$, $P''(x, -y, z)$, $P'''(-x, -y, z)$ είναι επίσης επιφάνειες των επιπέδων

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2yz \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) = 2yz$$

Περίπτωση 2, ομογενήες εξισώσεις

$$(S_1): \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2\mu z \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{\mu} z \end{cases}, \mu \neq 0$$



Στον χώρο: Μία εξίσωση παριστάει $\Rightarrow$ επιφάνεια
 Δύο εξισώσεις παριστάνουν $\Rightarrow$ κοινή επιφάνειών,
 $\Rightarrow$ καμπύλη

$$(ε_2) \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2\mu\gamma \end{cases}$$

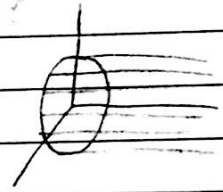
ΕΡΩΤΗΜΑ

Τ₁ παριστάει η εξίσωση

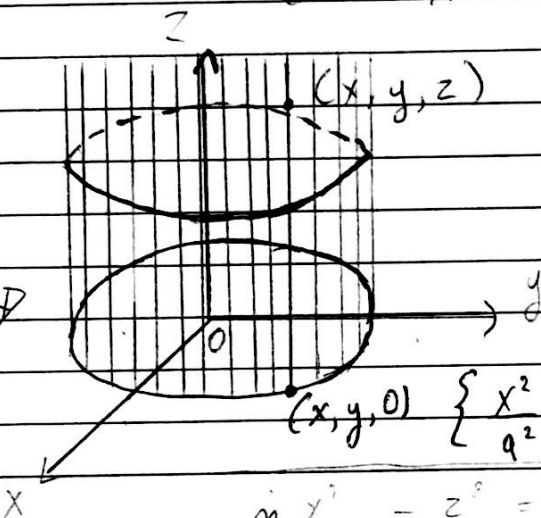
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

στον χώρο $x \geq 0$;

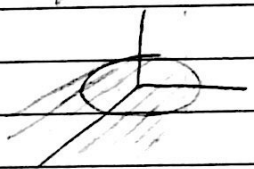
$\Rightarrow$ στο επίπεδο παριστάει
ελλειψή



ΕΛΛΕΙΨΗ



ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΟΣ
ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ



$$(x, y, 0) \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z=0 \end{cases}$$

$$\text{ή } \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \text{ ή } \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

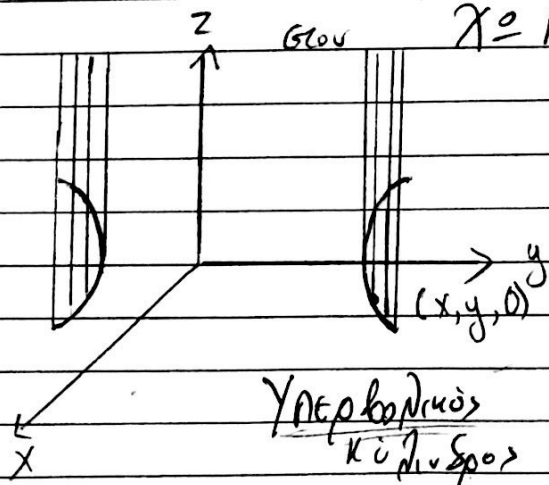
ΕΡΩΤΗΜΑ

Τ₁ παριστάει η εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

στον χώρο $x \geq 0$;

O_{xy}
 $\Rightarrow$ στο επίπεδο παριστάει
υπερβολή



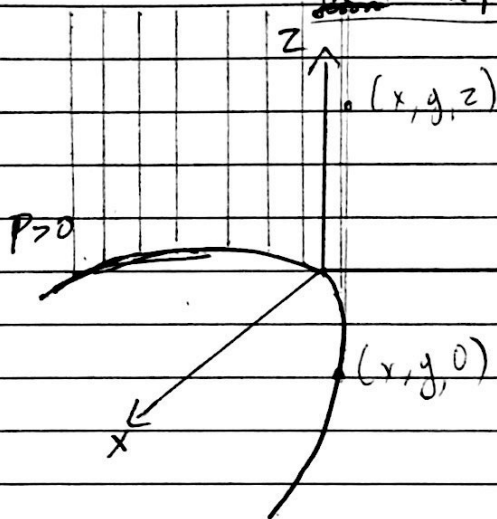
ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΟΣ
ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

$$\begin{cases} z=0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Τ. 1. Να προσάγει $m \in \mathbb{S}_{\text{ισογ}}$

$$\begin{cases} x^2 = 2py \\ x^2 = 2pz \\ y^2 = 2pz \end{cases} \text{ και } x^2 = 2py$$



Η τομή με το επίπεδο $z=0$

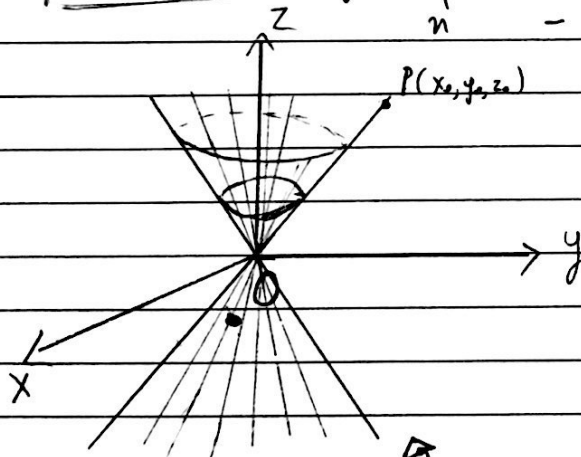
είναι η καμπύλη

$$\begin{cases} z=0 \\ x^2=2py \end{cases}$$

Παραβολικός ωαδισμός

Κωνικές επιφάνειες

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 0 \end{cases}$$



• Τομή με το επίπεδο $z=0$

$$\begin{cases} z=0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \end{cases}$$

Ελλειπτικός κώνος

Αρα η τομή με το επίπεδο $z=0$ είναι το σύνολο $\emptyset$.

• Τομή με επίπεδο παράλληλο προς το επίπεδο Oxy

$$\begin{cases} z=d \neq 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=d \neq 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{d^2}{\gamma^2} \end{cases}$$

Λ

Έστω $P(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ σημείο της επιφάνειας

Η ευθεία OP_0 καθορίζεται από το σημείο το O και το σημείο P_0

$OP_0 \rightarrow$ αυτή διότι $\vec{OP}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

Η ευθεία αυτή έχει εξίσωση:

$$\frac{x-0}{x_0} = \frac{y-0}{y_0} = \frac{z-0}{z_0} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x = tx_0 \\ y = ty_0 \\ z = tz_0 \end{cases}$$

Παραμετρική

Εξίσωση

Το σημείο P_0 της ευθείας OP_0 έχει συντεταγμένες $P(x, y, z)$

ή $x = tx_0, y = ty_0, z = tz_0$. Έχουμε

$$\frac{x_0^2}{\alpha^2} + \frac{y_0^2}{\beta^2} - \frac{z_0^2}{\gamma^2} = 0 \Rightarrow \frac{(tx_0)^2}{\alpha^2} + \frac{(ty_0)^2}{\beta^2} - \frac{(tz_0)^2}{\gamma^2} = 0 \Leftrightarrow$$

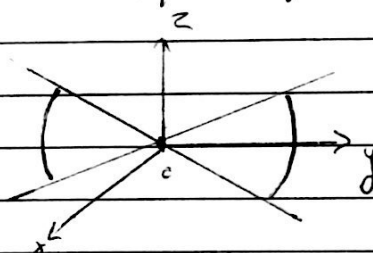
$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0$$

Άρα η ευθεία OP_0 περιέχει την επιφάνεια ή εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0$$

Αν η εξίσωση ήταν:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 0$$



ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ Τη περίπτωση που $\alpha_0 = 0$ η εξίσωση του $\mathbb{R}^3$

$$\alpha_{11}x^2 + \alpha_{22}y^2 + \alpha_{33}z^2 + 2\alpha_{12}xy + 2\alpha_{13}xz + 2\alpha_{23}yz + 2\alpha_1x + 2\alpha_2y + 2\alpha_3z + \alpha = 0;$$

Αντικείμενο: ελλειψοειδές, κοίλο υπερβολοειδές, ...
εμπροσπίως κέντρο

Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή του $\mathbb{R}^3$

$$q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$q(x, y, z) = \alpha_{11}x^2 + \alpha_{22}y^2 + \alpha_{33}z^2 + 2\alpha_{12}xy + 2\alpha_{13}xz + 2\alpha_{23}yz$$

$$= \mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{x}$$

$\hookrightarrow$

όπου $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ και $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ είναι ο

(σφαιρικός) πίνακας της ως προς τη συνήθη βάση
 $\{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$ του $\mathbb{R}^3$

Υπάρχει ορθογώνιος 3×3 πίνακας P ($P^t = P^{-1}$)
 τέτοιος ώστε $P^t A P = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ είναι οι ιδιοτιμές του A .

Ο πίνακας P είναι ο πίνακας περάσματος σε ορθοκανονική
 δεξιόστροφη βάση $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ αντιστοιχίζοντας από ιδιοδιανύσματα
 του A : $(x, y, z) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = x'\vec{e}'_1 + y'\vec{e}'_2 + z'\vec{e}'_3$

$$X = P X' \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$q(x, y, z) = X^t A X = (P X')^t A (P X')$$

$$q(x, y, z) = X' \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} X' \\ = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$$

Για να $\left\{ \begin{array}{l} 0. \text{ πρώτα να γραφτούν των ιδιοτιμών να είναι οι} \\ \text{αξίες του } A \\ 0. \text{ πρώτα να ιδιοδιανύσματα των ιδιοτιμών να είναι} \\ \text{το ίδιο με τα } A \end{array} \right.$
 επιλέξω οι
 άνω βάση της
 η βάση

LD

Παράδειγμα :

Τι παρίστανται η εξίσωση

$$-x^2 - y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 3$$

Λύση : θεωρούμε την τετραγωνική μορφή $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$q(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

10/05/2018

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Τι παρίστανται η εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού στον χώρο

$$\alpha_{11}x^2 + \alpha_{22}y^2 + \alpha_{33}z^2 + 2\alpha_{12}xy + 2\alpha_{13}xz + 2\alpha_{23}yz + 2\alpha_1x + 2\alpha_2y + 2\alpha_3z + \alpha = 0$$

Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή του $\mathbb{R}^3$, $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ $f = q(x, y, z) =$

$$\alpha_{11}x^2 + \alpha_{22}y^2 + \alpha_{33}z^2 + 2\alpha_{12}xy + 2\alpha_{13}xz + 2\alpha_{23}yz \text{ και έχουμε:}$$

$$q(x, y, z) + 2\alpha_1x + 2\alpha_2y + 2\alpha_3z + \alpha = 0$$

$$q(x, y, z) = x^t A x, \quad A = (a_{ij}), \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- Αν A θετικός, τότε παρίστανται τεύχος (εφαπτόμενο τετραγώνων)

Π.χ Τι παρίστανται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2z^2 - 2x - 4y - 12z + 16 = 0$

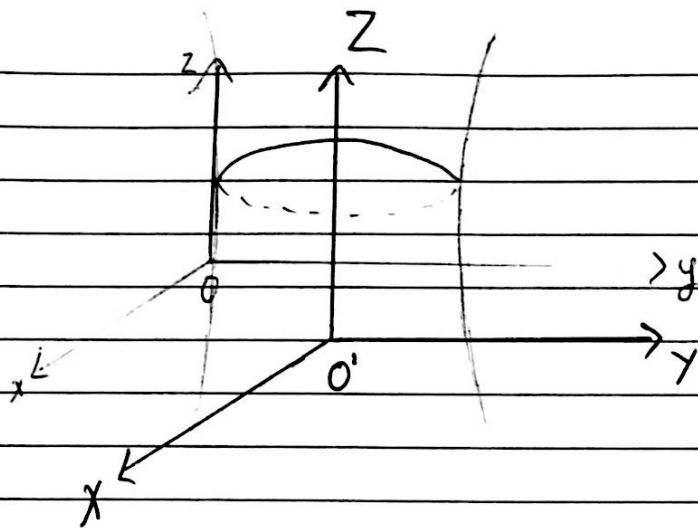
Απάντηση

$$(x^2 - 2x + 1)^2 + (y^2 - 2y + 1)^2 - 2(z^2 + 2z + 1) - 16 =$$
$$= 1 + 4 - 18 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 - 2(z+3)^2 = 3 (*)$$

Ορίζω $X = x-1, \quad Y = y-2, \quad Z = z+3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = X+1 \\ y = Y+2 \\ z = Z-3 \end{cases}$$

Κάτω παρίστανται τεύχος
ή ενα άψοφο
 $O'(1, 2, -3)$



$$I_{\text{το}} \quad O'XYZ \quad (*) \Leftrightarrow X^2 + Y^2 - 2Z^2 = 3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{X^2}{3} + \frac{Y^2}{3} - \frac{Z^2}{\frac{3}{2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{X^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{Y^2}{(\sqrt{3})^2} - \frac{Z^2}{(\sqrt{3/2})^2} = 1$$

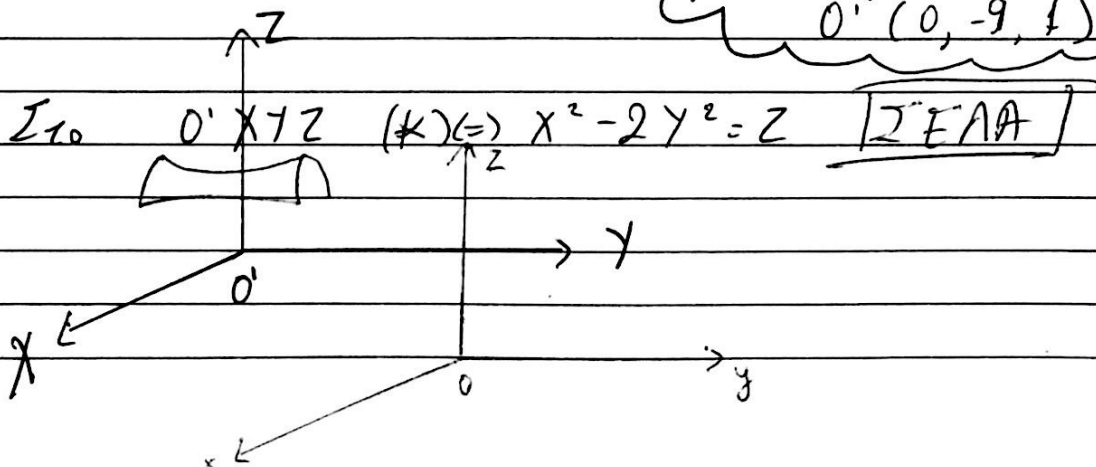
MONOXENO
[ΥΠΕΡΒΟΛΟΕΙΔΕΣ]

Π.Χ T_1 $\text{παραμένει η εξίσωση } x^2 - 2y^2 + 36y - z - 161 = 0$

Αντικαθ. $x^2 - 2(y^2 + 2y \cdot 9 + 9^2) - z - 161 = 0 \Leftrightarrow$
 $x^2 - 2(y^2 + 2y \cdot 9 + 9^2) - z - 161 = -2 \cdot 9^2 \Rightarrow$
 $x^2 - 2(y+9)^2 = z - 1 \quad (*)$

Θέω $x = X, y = y+9, z = z-1$
 $(\Rightarrow) \begin{cases} x = X+0 \\ y = Y-9 \\ z = Z+1 \end{cases}$

Κέντρο παραμόρφωσης
 ή κέντρο αρχής
 $O' (0, -9, 1)$



Αν ο A δειεί είναι διαγώνιος, τότε είναι διαγωνοποιήσιμο, δηλαδή
 υπάρχει ορθογώνιο 3×3 πίνακας P ώστε $P^t A P = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$[P X]$ Πιπλετιν n εδωκε $2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz = 1$

Αντικαθιστώντας την τετραγωνική μορφή $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz = X^t A X, \text{ όπου}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ και } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ είναι ο}$$

Πίνακας της, ως προς τη συνάρτηση βάσης $\{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \dots = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$$

Άρα οι ιδιοτιμές του A είναι:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$$

Η ανάλυση μας για
 την ιδιοτιμή 0 είναι 1
 $\Rightarrow \dim V(0) = 1$

► 0 ιδιοτιμή: $V(\lambda_1) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (A - \lambda_1 I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \dots \right\} = \text{Span} \{ (1, 1, 1) \}$$

Το $(1, 1, 1)$ είναι βάση του $V(\lambda_1)$

► 1 ιδιοτιμή: $V(\lambda_2) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (A - \lambda_2 I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$

$$= \left\{ \dots / \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{Span} \{ (0, 1, -1) \}$$

Το $(0, 1, -1)$ είναι βάση του $V(\lambda_2)$

► 0 ιδιοτιμή : $V(\lambda_3) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (A - \lambda_3 I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} =$
 $= \{ \dots / \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
 Το $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι βάση $V(\lambda_3)$

→ Εξετάζω εάν η βάση είναι δεξιόστροφη

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 2 + 4 = 6 > 0$ (δεξιόστροφη)

Τότε : $\left\{ \vec{e}_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \vec{e}_2' = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \right.$
 $\left. \vec{e}_3' = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\}$

⇒ ΟΡΘΟΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΔΕΞΙΟΤΡΟΦΗ ΒΑΣΗ

Θεωρώ τις νέες συντεταγμένες $Ox'y'z'$ ως προς τα βάση $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$
 (x, y, z) συντεταγμένες ως προς το $Oxyz$
 (x', y', z') συντεταγμένες ———— $Ox'y'z'$

$$(x, y, z) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

$$(x', y', z') = x'\vec{e}_1' + y'\vec{e}_2' + z'\vec{e}_3'$$

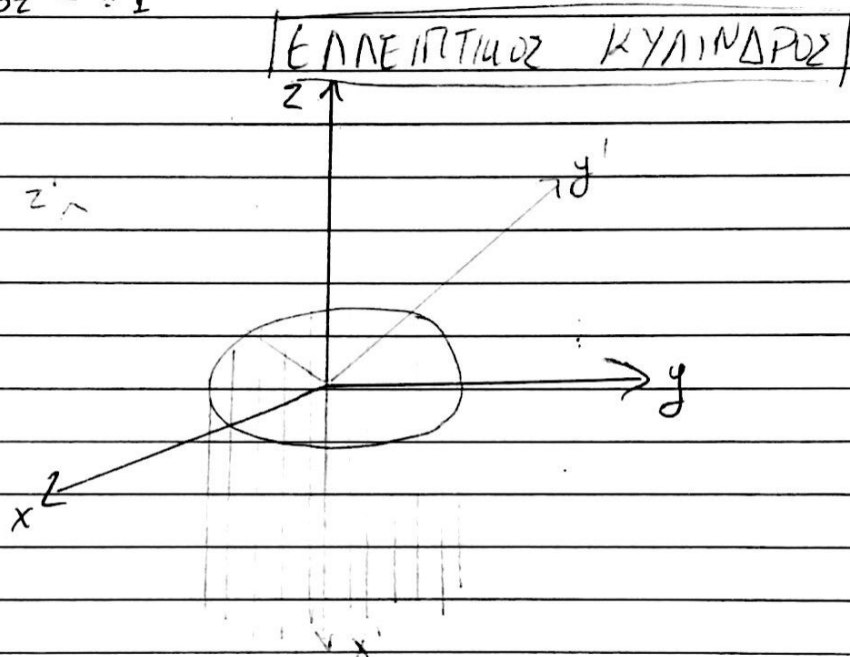
$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad X = P X'$$

→ 0 P είναι ο ορθογώνιος πίνακας μεταβάσεως

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad \hookrightarrow$$

$$q(x, y, z) = X^t A X = (P X')^t A (P X') = (X')^t (P^t A P) X' = \\ = (X')^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} X' \Rightarrow q(x, y, z) = 0x'^2 + 1y'^2 + 3z'^2$$

Συνεπώς στο σύστημα $0x'y'z'$ η (*) γράφεται ως εξής
 $y'^2 + 3z'^2 = 1$



ΠΡΟΒΛΗΜΑ (*) T_1 Παράσχετε η εξίσωση $3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz = 2$

Ανάλυση Θέλουμε τετραγωνική μορφή $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$q(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz = X^t A X, \text{ όπου}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ και } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ ως προς τα}$$

$$\text{βασικά διάνυσμα } \{ \vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1) \}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, ως A είναι:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 2-\lambda & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)^2 (4-\lambda)$$

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = 2$ (διπλά) και $\lambda_2 = 4$ (απλά)

▷ 0 ιδιοχώρος: $V(\lambda_1) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (A - \lambda_1 I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$

$$= \left\{ \dots / \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - z = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ (x, y, x) / x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ (x, 0, x) + (0, y, 0) / x, y \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \text{span} \{ (1, 0, 1), (0, 1, 0) \}$$

Το $\{ (1, 0, 1), (0, 1, 0) \}$ είναι βάση του $V(\lambda_1)$

▷ 0 ιδιοχώρος: $V(\lambda_2) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (A - \lambda_2 I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$

$$= \left\{ \dots / \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{matrix} -x - z = 0 \\ -2y = 0 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = -x, y = 0 \right\} = \left\{ (x, 0, -x) / x \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \text{span} \{ (1, 0, -1) \}$$

Το $(1, 0, -1)$ είναι βάση του $V(\lambda_2)$

→ ελέγχω αν η βάση είναι ορθογώνια

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 < 0 \quad \text{Αποκρίπεται}$$

Λ7

Τύπος: $\left\{ \vec{e}_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \vec{e}_2' = (0, 1, 0), \vec{e}_3' = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$

$\Rightarrow$ ΟΡΘΟΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΔΕΞΤΡΟΦΗ ΒΑΣΗ ΑΝΟΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Παράδειγμα: Γνωρίζουμε συντεταγμένες $Ox'y'z'$ ως προς τα $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$
 (x, y, z) συντεταγμένες ως προς τα $Oxyz$.
 (x', y', z') ———— $Ox'y'z'$

$$(x, y, z) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

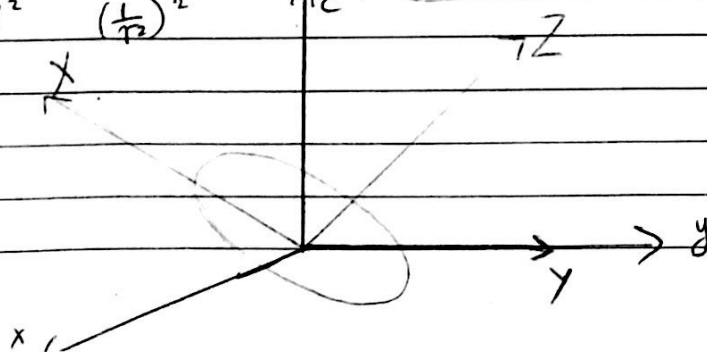
$$(x', y', z') = x'\vec{e}_1' + y'\vec{e}_2' + z'\vec{e}_3'$$

$X = PX'$ όπου $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ και P είναι ο πίνακας πινάκας που είναι αντιστροφή

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, P^T A P = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Επομένως $q(x, y, z) = X^T A X = (PX')^T A (PX') = (X')^T (P^T A P) X' =$
 $= (X')^T \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} X' = 2x'^2 + 2y'^2 + 4z'^2$

Η (*) στο Γνωρίζουμε συντεταγμένες $Ox'y'z'$ ισοδυναμεί με:
 $2x'^2 + 2y'^2 + 4z'^2 = 2 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 + 2z'^2 = 1 \Leftrightarrow$
 $\frac{x'^2}{1^2} + \frac{y'^2}{1^2} + \frac{z'^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1$ [ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΗΣ]



ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Το παρίστανται η εξίσωση $-x^2 - y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 2$ (*)

Απάντηση: Οπρίν τήν ετερογενή φόρμή $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $q(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = X^t A X$, όπου:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{κα} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ως} \quad \text{πο} \quad \text{τη}$$

βασική βάση $\{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της A είναι:

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1-\lambda & -1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1-\lambda)(\lambda+2)^2 \end{aligned}$$

Αρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 1$ (αν λ_1) και $\lambda_2 = -2$ (αν λ_2)
 (Το άθροισμα των ιδιοτιμών = αθροισμα της διαγωνίου της A)

$$\begin{aligned} \triangleright 0 \text{ ιδιοτιμές} \quad V(\lambda_1) &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (A - \lambda_1 I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{matrix} x = z \\ y = z \end{matrix} \right\} = \left\{ (x, x, x) / x \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \text{Span} \{ (1, 1, 1) \} \end{aligned}$$

Το $\{(1, 1, 1)\}$ είναι βάση $v \in V(\lambda_1)$

Το σύμφατα πρόβλημα να το λύσω και με τη μέθοδο Gauss, χρησιμοποιώντας τον ελαχιστοποιητή πινάκω

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

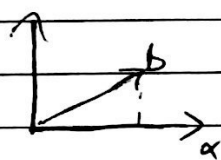
$$\triangleright 0 \quad \text{όλωση: } V(\mathcal{A}_2) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (A - \lambda_2 I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \dots / \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0 \right\} =$$

$$= \left\{ (x, y, -x-y) / x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ (x, 0, -x) + (0, y, -y) / x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ = \text{Span} \left\{ (1, 0, -1), (0, 1, -1) \right\}$$

$$\text{Το } \underbrace{(1, 0, -1)}_{\alpha} \underbrace{(0, 1, -1)}_{\beta} \text{ είναι βάση της } V(\mathcal{A}_2)$$

ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΚΑΘΕΤΑ, ΑΡΑ ΕΦΑΡΜΟΖΟ
GRAM-SCHMIDT



$$b = \frac{\langle \vec{\alpha}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle} \vec{\alpha} + \vec{\alpha}^\perp$$

Οπότε αν εφαρμόσουμε βάση της $V(\mathcal{A}_2)$:

$$\left\{ (1, 0, -1), (0, 1, -1) - \frac{1}{2} (1, 0, -1) = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2} \right) \right\}$$

$$\rightarrow \text{Το } (1, 1, 1) \text{ δοθέν αν θέλουμε είναι το } \vec{e}_3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(2-4) = 2 > 0$$

ΔΕΙΞΕΤΕ ΤΗΝ

$$\text{Και έτσι έχω: } \left\{ \vec{e}_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \vec{e}_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \right. \\ \left. \vec{e}_3' = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

Είναι πλέον ορθόνη βάση. Εξιστούν βάση αόι ορθογώνια, η οποία ορίζει ορθόνη σύστημα συντεταγμένων $Ox'y'z'$:

□

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad X = P X', \quad P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

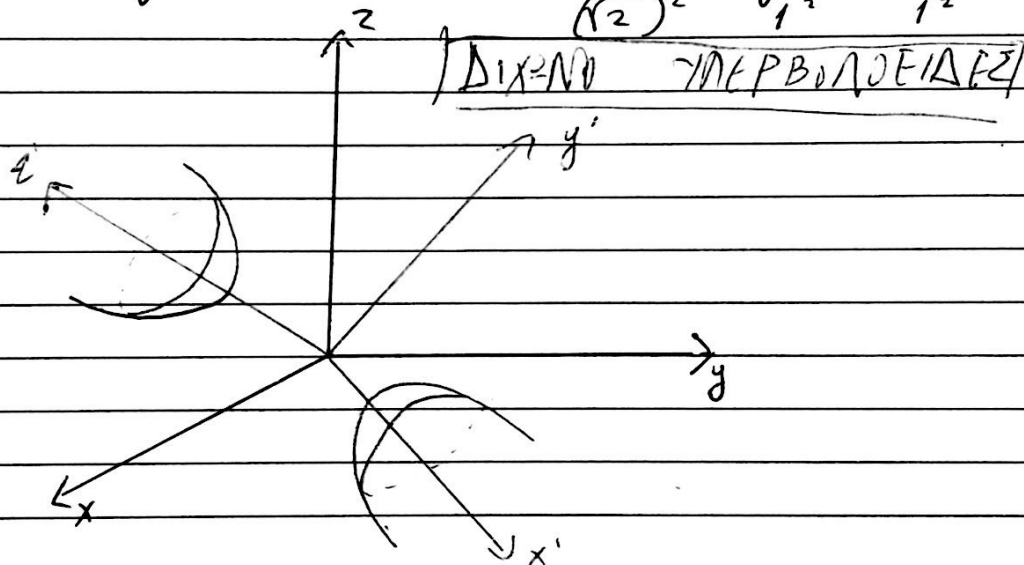
$$P^t A P = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς, $q(x, y, z) = X^t A X = (P X')^t A (P X') = (X')^t (P^t A P) X'$

$$= (X')^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} X' = x'^2 - 2y'^2 - 2z'^2$$

Η (*) αό σύμψη συνελήφθησαν 0x'y'z' ισοδυναμεία πρὸς G:

$$x'^2 - 2y'^2 - 2z'^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{y'^2}{1^2} - \frac{z'^2}{1^2} = 1$$



ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Τι παραστάς η εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 - 4yz + 3x + 2y = 0$ (*)

Ανίστην Ορίζω τω τετραγωνική φόρμ $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4yz = X^t A X \text{ όπου } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ και}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

→ αρα τω συνάρτησιν q σε κανονική φόρμ

$$\{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$$

↳

6 χαρακτηρισιστικές τιμές της A είναι:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+1)$$

Οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=3$ ΑΝΑΛΕΞ

$$D V(\lambda_1) = \text{span} \{ (1, 0, 0) \}$$

ΕΝΕΓΧΕ (ΑΝ ΕΙΝΑΙ)

$$D V(\lambda_2) = \text{span} \{ (0, 1, 1) \}$$

ΚΑΘΕΤΑ ΜΕΤΑΞΥ

$$D V(\lambda_3) = \text{span} \{ (0, 1, -1) \}$$

ΤΟΥΣ ΑΝΑ ΔΥΟ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 < 0 \quad \text{Αρριστεροστροφική}$$

$$\text{Άρα } V(\lambda_3) = \text{span} \{ (0, -1, +1) \}$$

$$\underline{\underline{\text{Εξ61}}}: \left\{ \vec{e}_1' = \vec{e}_1 = (1, 0, 0) \quad \vec{e}_2' = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right.$$

$$\left. \vec{e}_3' = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

Εάν χρησιμοποιήσουμε τις ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα αν ορίσει κάποια ~~και~~ συντεταγμένες $Ox'y'z'$.

$$X = P X', \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$P^t A P = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$q(x, y, z) = X^T A X = (X')^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} X' = 1x'^2 - 1y'^2 + 3z'^2$$

H (*) so Gl. (2) in $Ox'y'z'$ schreiben: $x'^2 - y'^2 + 3z'^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z'\right) = 0$

$$\Leftrightarrow x'^2 - y'^2 + 3z'^2 + 3x' + \sqrt{2}y' - \sqrt{2}z' = 0$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Kürve in der $Ox'y'z'$ darstellen

$$\left(x'^2 + 2x' \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) - \left(y'^2 - 2y' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) + 3\left(z'^2 - 2z' \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} + \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2\right) = \frac{9}{4} - \frac{1}{2} + 3\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2$$

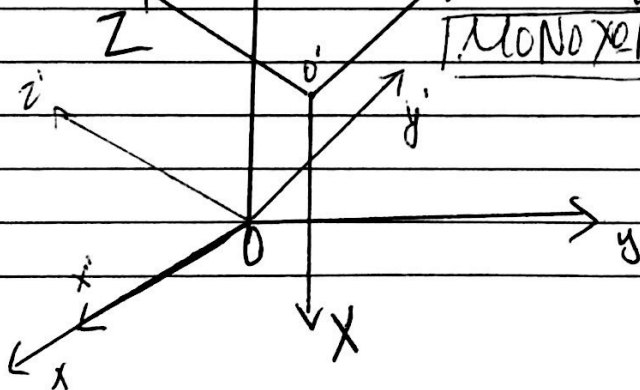
$$\Leftrightarrow \left(x' + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(y' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3\left(z' - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2 = \frac{23}{12}$$

Definiere $X = x' + \frac{3}{2}$, $Y = y' - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $Z = z' - \frac{\sqrt{2}}{6}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = X - \frac{3}{2} \\ y' = Y + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z' = Z + \frac{\sqrt{2}}{6} \end{cases}$$

$$O'XYZ \rightarrow O' \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{6} \right)$$

$$X^2 - Y^2 + 3Z^2 = \frac{23}{12} \Leftrightarrow \frac{X^2}{\left(\frac{\sqrt{12}}{23}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\frac{\sqrt{12}}{23}\right)^2} + \frac{Z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{12}}{23}\right)^2} = 1$$



MONOMORPHISME

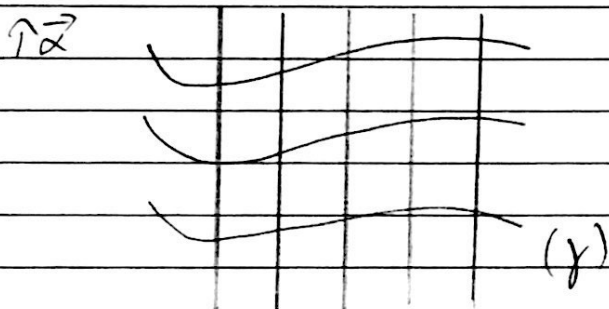
Παλιό

15/05/2018

Επιφάνειες στο χώρο $\mathbb{R}^3$

1 Κανονιστικές επιφάνειες

ΟΡΙΣΜΟΣ Μια επιφάνεια λέγεται κανονιστική όταν παρίσταται από μια συνάρτηση (x, y, z) η οποία μπορεί να γράφεται ως $z = f(x, y)$ συνεχώς παρακείμενη προς ένα σταθερό διάνυσμα $\vec{a} = (a, b, c)$ και να είναι μία σταθερή απόσταση.



Η συνάρτηση (x, y, z) ονομάζεται γεννήτρια της επιφάνειας ενώ η σταθερή απόσταση ονομάζεται απόσταση της κανονιστικής επιφάνειας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Να βρεθεί η εξίσωση της κανονιστικής επιφάνειας με γεννήτρες παρακείμενες προς ένα διάνυσμα $\vec{a}$ και απόστασης των γεννητριών

$$(x, y, z) : \{ f_1(x, y, z) = 0, f_2(x, y, z) = 0 \}$$

Απάντηση : Ας υποθέσουμε ότι

$$(x, y, z) : \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Είναι οι εξισώσεις μιας ευθείας που είναι παρακείμενη

CP

Προς το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ προκύπτει με τις διαφορές αυτές το $\vec{\beta}$ οι οποίες

$$(E\beta) : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Είναι κατευθυνόμενες προς την (E). Πρέπει να προσδιορίσουμε για ποιές τιμές της $\vec{\beta}$ οι (Eβ) τέτουν την κατεύθυνση (γ) έτσι έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad // \quad \begin{array}{l} 4 \text{ εξισώσεις ως προς} \\ 3 \text{-αγνωστούς } x, y, z \end{array}$$

Αναλογώντας με x, y, z καταλήγουμε σε μια εξίσωση της μορφής $\varphi(x, y, z) = 0$ ή ισοδύναμα, $\varphi(A_1x + B_1y + C_1z + D_1, A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$

Η τελευταία σχέση περιγράφει την επιφάνεια που ζητείται.

Σημείωση : Κάθε εξίσωση της μορφής

$$\varphi(A_1x + B_1y + C_1z + D_1, A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

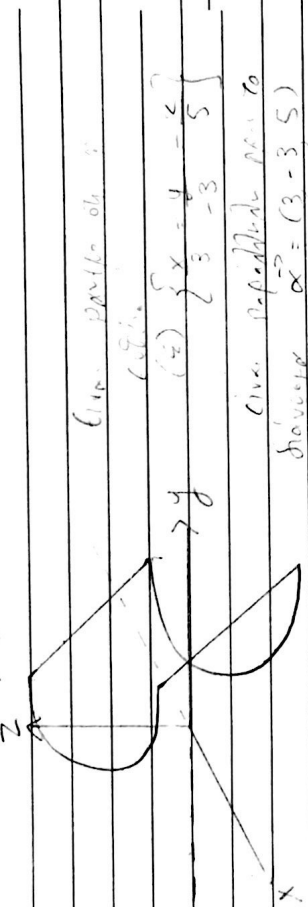
όπου $(A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2) \neq 0$

παριστά συνδυασμένη επιφάνεια με γενικές κατευθυνόμενες προς το διάνυσμα $\vec{\alpha}$

Παρατήρηση : Η εξίσωση $\varphi(x, y, z) = 0$ αν ληφεί $\mathbb{R}^3$ παριστά συνδυασμένη επιφάνεια με γενικές κατευθυνόμενες προς τον άξονα OZ. Κάθε εξίσωση της μορφής $\varphi(x, y, z) = 0$ για μεταβλητές κατευθυνόμενες συνδυασμένη επιφάνεια με γενικές κατευθυνόμενες προς τον άξονα $\vec{\alpha}$ αν παρατεταχθεί η μεταβλητή προς $\vec{\alpha}$.

Exercício 1 Na Gráfica a seguir as equações de

Ex: 1) $y = x^2 - 5x + 6$, $z = 0$
 2) $x = 3 - 3z$



Interpretando o resultado, temos:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ 5y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ex: 1) } \begin{cases} x = y = 0 \\ 5y + 3z = 0 \end{cases}$$

Interpretando o resultado, temos:
 a) Ex: 1) tipo de solução (ponto). Ex: 1)

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x + 6 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 5y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Analisando o resultado, temos: } \begin{cases} z = 0 \\ x = 1 - y/5 \end{cases}$$

Als wir zerkleinert & Sieben aufbewahrt zu n. & Sieben
ins Gefäßchen an Luft füllt:

$$\left(x + y - \frac{5y + 3z}{5}\right)^2 - 5\left(x + y - \frac{5y + 3z}{5}\right) + 6 - \frac{5y + 3z}{5} = 0$$

Flapadours

Παραδείγματα Να αναζητήσει ον η ελάχιστη
 $z^2 - 4xy - 2yz + 2xz + 1 = 0$
 παριστάμενη με τη μέθοδο των ελαστικών.

Der Prozess ist ein Markov-Prozess mit Zustandsraum $S = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$.
 Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind gegeben durch:

$$P(A_{t+1} = B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1, A_t = B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2) = 0$$

Exemple :

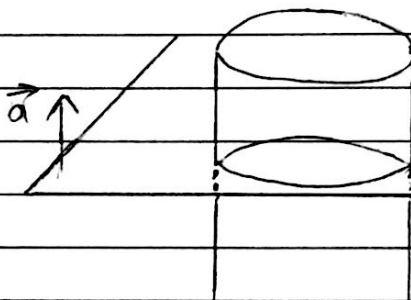
$$\begin{aligned} 0 &= z^2 - 4xy - 2yz + 2xz + 1 \\ &= z(z - 2y) + 2x(z - 2y) + 1 \\ &= (z + 2x)(z - 2y) + 1 \end{aligned}$$

Α) πο η ταρταρική είναι κεντρική με πρώτη δοσολογία 2-4000 mg την εβδομάδα

$$\begin{cases} z + 2x = 0 \\ z - 2y = 0 \end{cases}$$

Εφαρμογή

Εφαρμογή Na βρεθεί η προβολή της καμπύλης $(\gamma): \{x^2 + y^2 = 1, z = y - 1\}$ στο επίπεδο Oxz .



"12, 60th"

Ένα δάσος και οι ορο

O_{xz} final - So final to

$\vec{\alpha} = (0, 1, 0)$. Η προβολή του

On left printer and the left ex

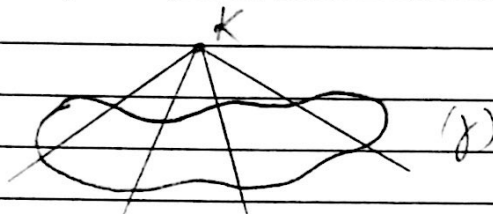
ΕΠΙΘΕΤΟ ΟΥΤΕ ΠΙ ΤΩ ΑΝΔΡΩΝΙ

Επιπλέον να έχω ως οδηγό του μαθήτη (γ') να γράφει
παράλληλα προς το διάνυσμα $\vec{a}$. Αποφασίζοντας το πρώτο διάνυσμα
να ξεκίνησε από την αρχή ο μ.δ.α.

$$\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

2) Κωνικές επιφάνειες

ΠΡΙΣΜΟ2 Μια επιφάνεια λέγεται κωνική όταν παρέρχεται από μια ευθεία η οποία λέγεται εστία και υπάρχει και ένας ουσίος κενός K και οι συνιστώσες για όλους τα σημεία κωνικά.



Το ουσίος K ονομάζεται κορυφή της κωνικής επιφάνειας και η ευθεία από την οποία ονομάζεται οξυς της κωνικής επιφάνειας. Η ευθεία που παρέρχεται από την επιφάνεια λέγεται γεννήτρια.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Να βρεθεί η εξίσωση της κωνικής επιφάνειας με κορυφή το ουσίος $K(x_0, y_0, z_0)$ και οξυς κωνικά $(\gamma) : \{ f_1(x, y, z) = 0, f_2(x, y, z) = 0 \}$

Από την γεννήτρια διασχίζει από το $K(x_0, y_0, z_0)$ και έχει εξίσωση

$$(\varepsilon) : \left\{ \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{\gamma} \right\}$$

Πότε η γεννήτρια περνάει από το x, y, z τότε η (ε) θα διασχίζει και τον (γ) . (Για να διασχίσει το

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \\ \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{\gamma} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \\ y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) \\ z - z_0 = \frac{\gamma}{a}(x - x_0) \end{cases}$$

L7

Με κεντρική τιμή x, y, z υπήρχε ϵ τέτοια ώστε
 πολλαπλάσια $\varphi\left(\frac{b}{\alpha}, \frac{r}{\alpha}\right) = 0 \Leftrightarrow F(\alpha, b, r) = 0$ (*)

Οπότε αν F είναι ομογενής ως προς α, b, r . Οπότε προκύπτει
 $x - x_0 = t\alpha, y - y_0 = tb, z - z_0 = tr$

και (*) λαμβάνει την μορφή

$$0 = F(\alpha, b, r) = F\left(\frac{1}{t}(x-x_0), \frac{1}{t}(y-y_0), \frac{1}{t}(z-z_0)\right) \\ = \left(\frac{1}{t}\right)^k F(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$$

Αρα αν ϵ τέτοια υπήρχε με δοσμένη τιμή x_0, y_0, z_0 τότε $F(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$ οπότε F ομογενής.

ΟΡΙΣΜΟΣ Μια συνάρτηση $F(\cdot, \cdot, \cdot)$ λέγεται ομογενής με
 βαθμό $k \in \mathbb{N}$ αν ισχύει

$$F(t\alpha, tb, tr) = t^k F(\alpha, b, r)$$

για κάθε $\alpha, b, r \in \mathbb{R}$

Παρατήρηση Η $F(x, y, z) = xy + 3z^2 + y^2$ είναι ομογενής
 βαθμού 2. Παρατηρούμε $F(tx, ty, tz) = tx + ty +$
 $+ 3(tz)^2 + (ty)^2 = t^2(xy + 3z^2 + y^2) = t^2 F(x, y, z)$
 Η $F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z$ δεν είναι ομογενής.

Σημείωση: Κάθε ϵ τέτοια υπήρχε πολλαπλάσια

$$F(A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1, A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2, A_3x + B_3y + \Gamma_3z + \Delta_3) = 0$$

και ομογενής αν F είναι ομογενής βαθμού $k \in \mathbb{N}$ και

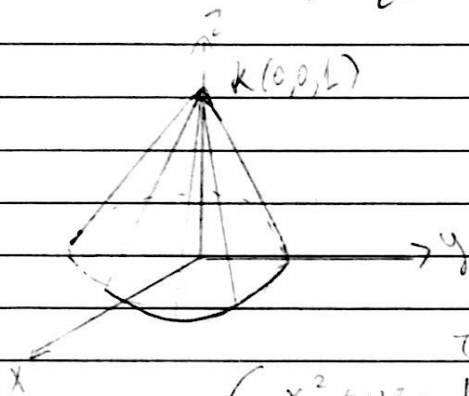
$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Παρατηρούμε αντιστρέφοντας τις στήλες και αφοραί το αντίστοιχο τμήμα
 των συνιστωσών

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + \Gamma_3z + \Delta_3 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

Παρατήρηση

Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση από το σημείο $K(0,0,1)$ ως προς την κορυφή
 $|g|: \{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$



Η γενική εξίσωση της επιφάνειας είναι

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z \in [0, 1] \end{cases}$$

Για να βρούμε την ελάχιστη απόσταση από το σημείο $K(0,0,1)$ στην κορυφή της κορυφής

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \\ y = \frac{b}{a}x \\ z = 1 + \frac{c}{a}x \end{cases}$$

Για να βρούμε την ελάχιστη απόσταση από το σημείο $K(0,0,1)$ στην κορυφή της κορυφής

$$a^2 + b^2 - c^2 = 0 \quad (*)$$

$$F(a, b, c) = a^2 + b^2 - c^2$$

Από την (*) και (**) έχουμε
 $\{x = at, y = bt, z = 1 + ct\} \quad (**)$

Από (*) και (**) $\Rightarrow$

$$x^2 + y^2 = (z-1)^2$$

Αυτή είναι η συνθήκη ελάχιστης απόστασης

Παρατήρηση

Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση από το σημείο $K(0,0,1)$

9y^2 - 11z^2 + 6yz - 18xz + 6y - 72x - 58z - 47 = 0
 παραγωγών κεντρικών επιφάνειας.

Παραγωγών της $F(x, y, z) = 9y^2 - 11z^2 + 6yz - 18xz + 6y - 72x - 58z - 47 = 0$

Για να βρούμε την ελάχιστη απόσταση από το σημείο $K(0,0,1)$ στην κορυφή της κορυφής

91100pt $X = x - a$ $Y = y - b$ $Z = z - \gamma$ και

$$F(X, Y, Z) = 9Y^2 - 11Z^2 + 6YZ - 18XZ$$

$$+ 18(b + 6\gamma + 6)Y + (-22\gamma + 6b - 18a - 58)Z$$

$$+ (-18\gamma - 12)X$$

$$+ (9b^2 - 11\gamma^2 + 6b\gamma - 18a\gamma + 6b - 12a - 58\gamma - 45)$$

Για να είναι η F ομογενής πρέπει

$$18b + 6\gamma + 6 = 0$$

$$-22\gamma + 6b - 18a - 58 = 0$$

$$18\gamma + 12 = 0$$

$$9b^2 - 11\gamma^2 + 6b\gamma - 18a\gamma + 6b - 12a - 58\gamma - 45 = 0$$

$$\Rightarrow a = 2$$

$$b = 1$$

$$\gamma = -4$$

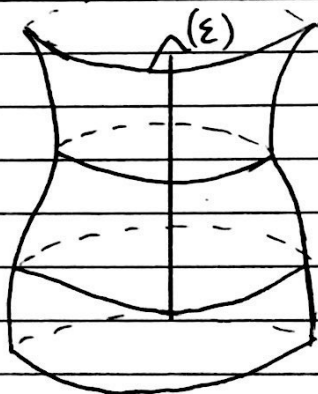
Περίττοι

18/05/2018

Επιφάνειες εκ περιγραφής

ΟΡΙΣΜΟΣ

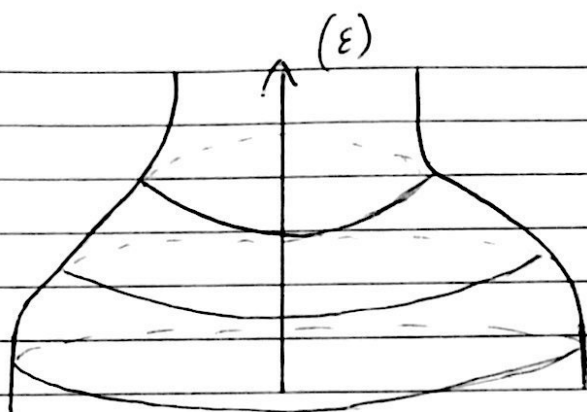
Μία επιφάνεια λέγεται επιφάνεια εκ περιγραφής όταν παράγεται με περιγραφή μιας καμπύλης γύρω από μια ευθεία.



- Η καμπύλη που περιγράφει ονομάζεται γενέτρα και η ευθεία γύρω από την οποία γίνεται η περιγραφή ονομάζεται άξονας περιγραφής.

Παρατήρηση: Κάθε βύθιο του γενέτρας και των περιγραφών γράφει μία περιφέρεια

κύκλου. Το ύψος των κύκλων αυτό βρίσκεται επί τον άξονα και είναι 6ε επίθετο μεθυσαν άξονα. Συνεπώς, μία επιφάνεια εκ περιγραφής γίνεται και μία περιφέρεια κύκλου η οποία έχει κέντρο τον άξονα ~~αξονα~~ περιγραφής.



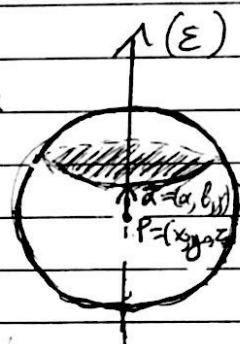
ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Να βρεθεί η εξίσωση της εκ περιφωφής επιφάνειας, η οποία παράγεται με περιστροφή της καμπύλης

$$(\gamma): \begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

γύρω από ~~την~~ την ευθεία

$$(\varepsilon): \begin{cases} \frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma} \end{cases}$$



Οα βρεθεί η εξίσωση της επιφάνειας, η οποία παράγεται με περιστροφή της καμπύλης (γ) γύρω από την ευθεία (ε).

$$ax + by + cz = d, \quad d \in \mathbb{R}$$

Εάν ονομάσουμε για βρεθεί με κέντρο το $P = (x_0, y_0, z_0)$ και εξίσωση:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = \rho^2$$

Ο κύβος με κέντρο στην ευθεία (ε) και με επιφάνεια κατόπιν της (ε) είναι:

$$(II_P): \begin{cases} (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = \rho^2 \\ ax + by + cz = d \end{cases}$$

↳

$\mu \in \mathbb{R}$, $\rho, z \in \mathbb{R}$. Θα πρέπει να προσδιορίσουμε ποια είναι των ρ, z οι οποίες έχουν συν. περιφέρεια στην επιφάνεια της γενεύουσας (γ) .
 Έτσι έρχεται το σύστημα:

$$\begin{cases}
 f_1(x, y, z) = 0 \\
 f_2(x, y, z) = 0 \\
 (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \rho^2 \\
 \alpha x + \beta y + \gamma z = z
 \end{cases}$$

Με αντικατάσταση των x, y, z θα βρούμε μια εξίσωση $\varphi(\rho^2, z) = 0$

Επομένως η επιφάνεια εκ περιφέρειας έχει εξίσωση της μορφής:

$$\boxed{\varphi((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2, \alpha x + \beta y + \gamma z) = 0}$$

ΠΥΛΟΛΕΡΑΖΜΑ

Μια επιφάνεια με εξίσωση

$$\varphi((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2, \alpha x + \beta y + \gamma z) = 0$$

παρουσιάζει επιφάνεια εκ περιφέρειας με άξονα των συθρίων ϵ η οποία διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0, z_0)$ και κείται στο επίπεδο $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η εξίσωση της επιφάνειας εκ περιφέρειας που παράγεται με περιστροφή της υπερβολής

$$(\gamma) : \begin{cases} y = x^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

γύρω από τον συθρία

$$(\epsilon) : \begin{cases} \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{0} \end{cases}$$

Η κινούμενη περιφέρεια έχει εξίσωση

$$(\rho) : \begin{cases} x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = \rho^2 \\ x = 2 \end{cases}$$

LD

Αν θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-2)^2 = \rho^2 \\ x=y \\ z=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=y \\ x=y \\ y=0 \end{cases}$$

Αν θέλουμε να βρούμε τις περιφέρειες της εσφίρας

$$\rho^2 + \rho^2 + 4 = \rho^2$$

Αντικαθιστώντας τις μεταβλητές έχουμε

$$x^2 + x^2 + 4 = x^2 + y^2 + (z-2)^2$$

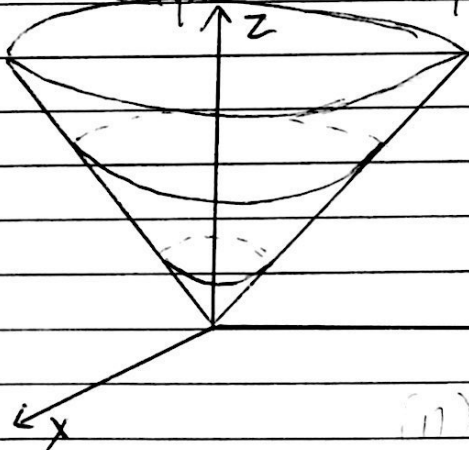
Ποιες είναι οι περιφέρειες που έχουμε;

Παρατήρηση:

Δίνονται η ευθεία

$$(ε): \begin{cases} y=x \\ x=0 \end{cases} \text{ της περιστροφής}$$

γύρω από τον άξονα OZ. Θα πρέπει να βρούμε τις περιφέρειες εκ περιστροφής που προκύπτουν.



Οι εσφίρες των άξονα περιστροφής είναι:

$$(ε) \begin{cases} \frac{x}{0} - y = z \\ 0 \end{cases}$$

> y ή Κίνηση περιστροφής γύρω από τον άξονα OZ

$$(II): \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \\ z=2 \end{cases}$$

Ποιες είναι οι περιφέρειες που εσφίρες γύρω από τον άξονα OZ

→

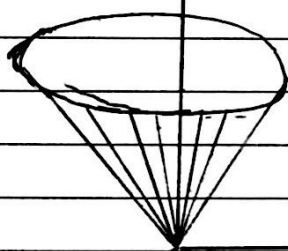
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = e^2 \\ z = y \\ y = z \\ x = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{των } x, y, z]{\text{με παραμ. φιν}} \boxed{2z^2 = e^2}$$

Με αντικατάσταση των παραμ. φιν έχουμε

$$2z^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \boxed{z^2 = x^2 + y^2}$$

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 10

1.1 Να βρεθεί η εξίσωση της κωνικής επιφάνειας με κορυφή το σημείο $(0,0,0)$ και άξονα την ευθεία z (γ): $(x^2 + y^2 = x, z = 1)$



Οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο $K(0,0,0)$ περιγράφονται από τις εξισώσεις ($\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$): $\left\{ \frac{x-0}{\alpha} = \frac{y-0}{\beta} = \frac{z-0}{\gamma} \right\}$

Θα πρέπει να βρούμε για ποιες τιμές των παραμέτρων οι ευθείες ($\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$) συναντούν την κωνίδα (γ). Έτσι λαμβάνουμε το σύστημα

$$\begin{array}{l} \text{Εξίσωση} \\ \text{κωνίδας} \end{array} \begin{cases} x^2 + y^2 = x \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \text{Εξίσωση} \\ \text{ευθείας} \end{array} \begin{cases} y = \frac{\beta}{\alpha} x \\ z = \frac{\gamma}{\alpha} x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = x \\ z = 1 \\ x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \gamma \end{cases}$$

Με κλιμακίωση των x, y, z έχουμε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\gamma^2} + \frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{\alpha}{\gamma} \Leftrightarrow \boxed{\alpha^2 + \beta^2 = \alpha\gamma} \quad (*)$$

Αν θεωρήσουμε γ ορισμένη $\text{ms}(\Sigma_{\text{αβγ}})$ έχουμε

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \alpha t \\ y = \beta t \\ z = \gamma t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{x}{t} \\ \beta = \frac{y}{t} \\ \gamma = \frac{z}{t} \end{cases} \quad (**)$$

Αντικαθιστώντας (**) στην (*) έχουμε: $\frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{t^2} = \frac{xz}{t^2} \Rightarrow$

$$\boxed{x^2 + y^2 = xz} \quad \text{Είναι η επιφάνεια του κύβου}$$

1.2 Να δοθεί ότι η $\{ \text{εξίσωση}$

$$xy + z^2 - 2x - y + 2 = 0$$

παριστάει κωνική επιφάνεια. Να βρεθεί η κορυφή της και για ο συγκεκριμένο παρανοή

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$F(x, y, z) = xy + z^2 - 2x - y + 2 = 0$$

Να να παραστήσει η $\{ \text{εξίσωση}$ αυτή κωνική επιφάνεια,

θα πρέπει να υπάρχουν α, β, γ τέτοια ώστε η

$$F(x-\alpha, y-\beta, z-\gamma)$$

να είναι ομογενής ως προς $x-\alpha, y-\beta, z-\gamma$.

Οι τρεις:

$$X = x - \alpha, \quad Y = y - \beta, \quad Z = z - \gamma$$

έτσι,

$$F(X, Y, Z) = (X + \alpha)(Y + \beta) + (Z + \gamma)^2$$

$$- 2(X + \alpha) - (Y + \beta) + 2$$

$$= XY + Z^2 + (\beta - 2)X$$

$$+ (\alpha - 1)Y + 2\gamma Z + \alpha\beta + \gamma^2 - 2\alpha - \beta + 2$$

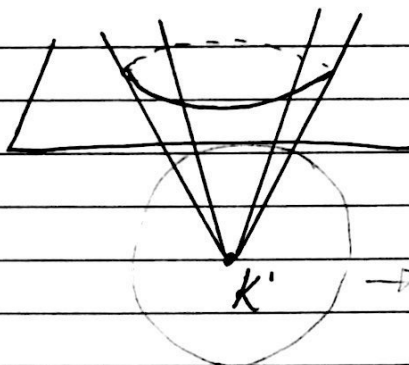
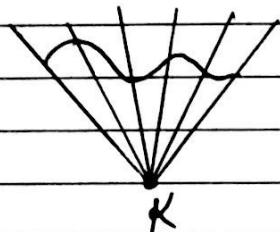
Από την

$$\begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = 1 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\alpha\beta + \gamma^2 - 2\alpha - \beta + 2 = 0$$

hence

Η κορυφή της ανωτέρω επιφάνειας είναι το σημείο $K(1, 2, 0)$. Μία οριζόντια καμπύλη βρίσκεται τμήματα της επιφάνειας με βάση.



13

Να αποδειχθεί ότι η επιφάνεια

$$4 \left(\frac{x-3}{y} \right)^2 + 9 \left(\frac{y+z-1}{y} \right)^2 = 36$$

παριστάει κυκλική επιφάνεια.

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα ως

$$4(x-3)^2 + 9(y+z-1)^2 - 36y^2 = 0$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση γράφεται ως

$$F(x-3, y+z-1, y) = 0$$

Οπότε έχουμε κυκλική επιφάνεια με κορυφή το σημείο K όπου $y=0$.

$$\begin{cases} x-3=0 \\ y+z-1=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$$

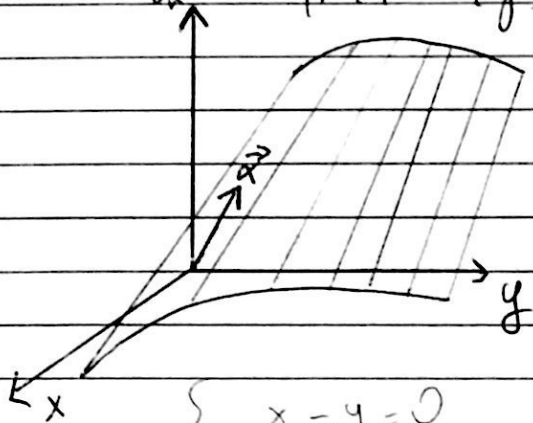
Άρα έχουμε

$$K(3, 0, 1)$$

LD

11.4

Να βρεθεί η αλγεβρική εξίσωση με συντελεστές παράλληλους προς το διάνυσμα $\vec{a} = (1, 1, 2)$ και οδός της καμπύλης $(\gamma): (xy=1, z=0)$



Μια ευθεία που είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{a} = (1, 1, 2)$ είναι:

$$(E) \begin{cases} x - y - z \\ 1 \quad 1 \quad 2 \end{cases}$$

Ηος το σημείο (γ) της καμπύλης

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

Επομένως, όλες οι ευθείες που είναι παράλληλες προς το διάνυσμα $\vec{a} = (1, 1, 2)$ περιγράφονται από την εξίσωση:

$$(E_{\lambda, \mu}) : \begin{cases} x - y = \lambda \\ 2y - z = \mu \end{cases}$$

Θα πρέπει να έχουμε ως προς αυτές την 2.η ο. (E_{\lambda, \mu}) συνιστά την καμπύλη (γ)

Θέτουμε το εύρος

$$\begin{aligned} \text{(Συνιστά)} & \begin{cases} xy = 1 \\ z = 0 \end{cases} \\ \text{καμπύλης} & \\ \text{(Συνιστά)} & \begin{cases} x - y = \lambda \\ 2y - z = \mu \end{cases} \\ \text{αδρών} & \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} xy = 1 \\ z = 0 \\ y = \mu/2 \\ x = \lambda + \mu/2 \end{cases}$$

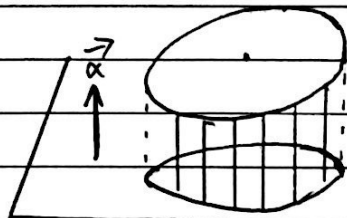
Με αλλαγή των x, y, z βάζουμε in a παρατήρηση λ, μ τ'αλλάξουν των ε. συνιστά

$$\left(\lambda + \frac{\mu}{2} \right) \frac{\mu}{2} = 1$$

$$\Rightarrow (2x - z)(2y - z) = 4$$

Ηος είναι η εξίσωση που ζητάμε

11.4. Να βρεθεί η προβολή της καμπύλης
 $(\gamma): (x^2 + y^2 + z^2 = 4, x + 3y + z - 2 = 0)$
 στο επίπεδο $x - y + z = 0$



Το νόρμα του επιπέδου

$$(n): x - y + z = 0 \text{ έχει το διάνυσμα}$$

$$\vec{\alpha} = (1, -1, 1)$$

Από την προβολή που έχουμε φέρουμε
 ως κοινή της καμπύλης επιπέδου (E) με κάποια
 των (γ) και γενικότερα Παράλληλος προς το $\vec{\alpha}$ με
 το επίπεδο (n) . Ας υπολογίσουμε την καμπύλη επιπέδου
 (E) . Μια ευθεία Παράλληλη προς το $\vec{\alpha}$ είναι η

$$(E): \left\{ \begin{array}{l} x = y = z \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$(E): \left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{array} \right.$$

Επομένως όλες οι ευθείες που είναι παράλληλες προς το
 $\vec{\alpha}$ περιγράφονται από την εξίσωση

$$(E_{\lambda, \mu}): \left\{ \begin{array}{l} x + y = 2 \\ y + z = \mu \end{array} \right. \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Για να βρούμε ποιας εξίσωσης ανήκουν λ, μ
 θεωρούμε το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + 3y + z = 2 \\ x + y = 2 \\ y + z = \mu \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ (x+y) + y + (y+z) = 2 \\ x+y = 2 \\ y+z = \mu \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x = 2 + \mu - 2 \\ y = 2 - 2 - \mu \\ z = 2 + 2\mu - 2 \end{array} \right.$$

Με αναζήτηση των x, y, z βρίσκουμε ότι οι παράμετροι
 λ, μ έχουν την εξίσωση $(2 + \mu - 2)^2 + (2 - 2 - \mu)^2 + (2 + 2\mu - 2)^2 = 4$

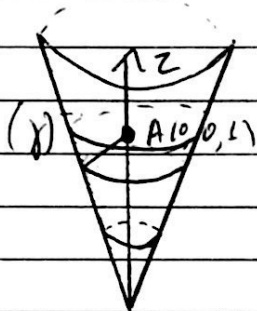
12

Από κωνικό επιφάνεια είναι η

$$(\mathcal{E}) : (2x+3y+z-2)^2 + (x+2y+z-2)^2 + (x-2y+3z-2)^2 = 4$$

Η κωνική ... $\mathcal{E} = \mathcal{E} \cap \Pi$

11.9 Να βρεθούν οι εξισώσεις των γραμμών τώνων των οποίων προβολή στο επίπεδο $A(0,0,1)$ στις γενικές του είναι $z^2 = x^2 + y^2$.



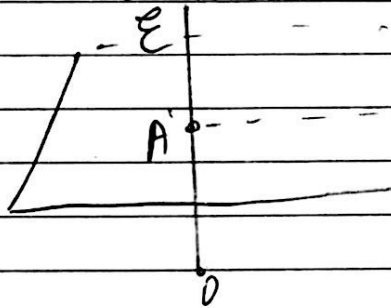
$K(0,0,0)$

Ο κύβος $z^2 = x^2 + y^2$ έχει ως κορυφή το $K(0,0,0)$ και ως άξονα τον άξονα z .
 $(\gamma) : \{ x^2 + y^2 = 1, z = 1 \}$

Έστω P να τυχαία σημείο του (γ) . Τότε υπάρχει $\theta \in [0, 2\pi]$ να

$$\vec{OP} = (\cos \theta, \sin \theta, 1)$$

Οπότε η εξίσωση των γραμμών τώνων που διέρχονται από το P είναι $\mathcal{E}(t) = t(\cos \theta, \sin \theta, 1)$



$A'(0,2,1)$

Ας υπολογίσουμε τον προβολή

A' ως A στις γενικές $(\mathcal{E})$

Η προβολή θα κείνη ως το

το επίπεδο (Π) να διέρχεται

το A να είναι κάθετο στο επίπεδο (Π)

των κορυφών T_0 εντός A) έχει εξίσωση

$$(\Pi) : \cos \theta x + \sin \theta y + z - 1 = 0$$

Η τομή του (Π) με τον κύβο είναι το επίπεδο A'

$$= (t_0 \cos \theta, t_0 \sin \theta, t_0) \text{ με}$$

$$\cos^2 \theta t_0 + \sin^2 \theta t_0 + t_0 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow t_0 = 1/e$$

$$\text{Από } A' = \left(\frac{1}{2} \cos \theta, \frac{1}{2} \sin \theta, \frac{1}{2} \right)$$

Βλέπουμε ότι το A' βρίσκεται στο κύβο

$$(\gamma') : \{ x^2 + y^2 = \frac{1}{4}, z = \frac{1}{2} \}$$